La PROBABILITÀ

PROBABILITÀ: definizione

Considero dei generici valori v_i ognuno associato ad un evento specifico i

↓

Per essere delle **probabilità**, questi valori devono soddisfare le seguenti proprietà:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_i v_i = 1 \\ 0 < v_i < 1\end{gathered}}$$

↓

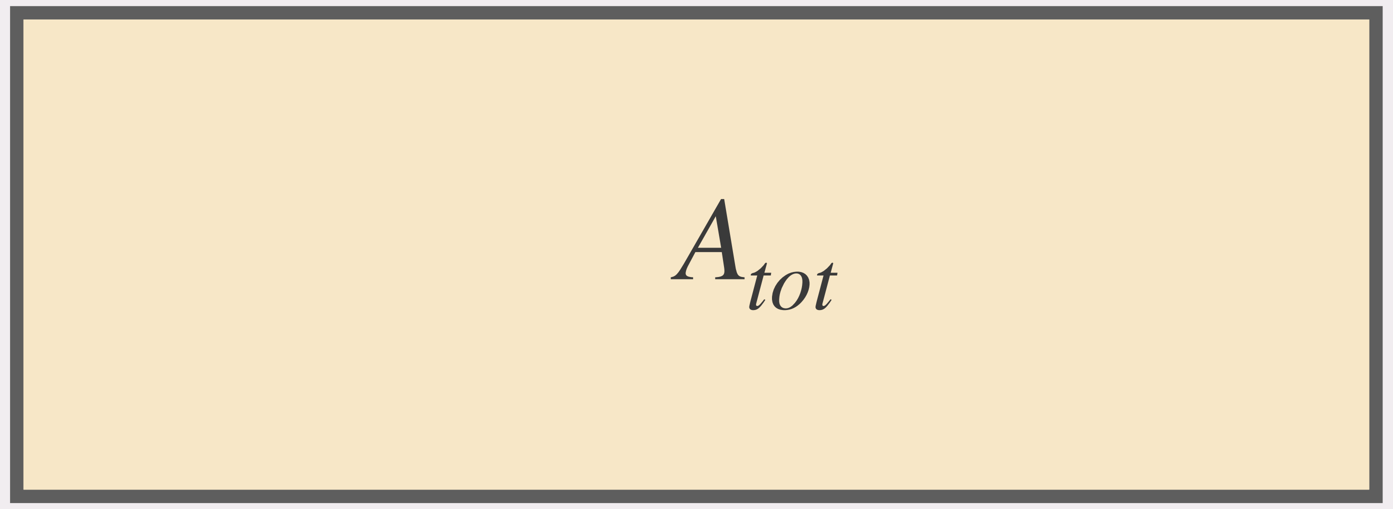
‼ **NON** esiste un'unica definizione di probabilità!

In che modo quindi dobbiamo definire la probabilità in meccanica quantistica???

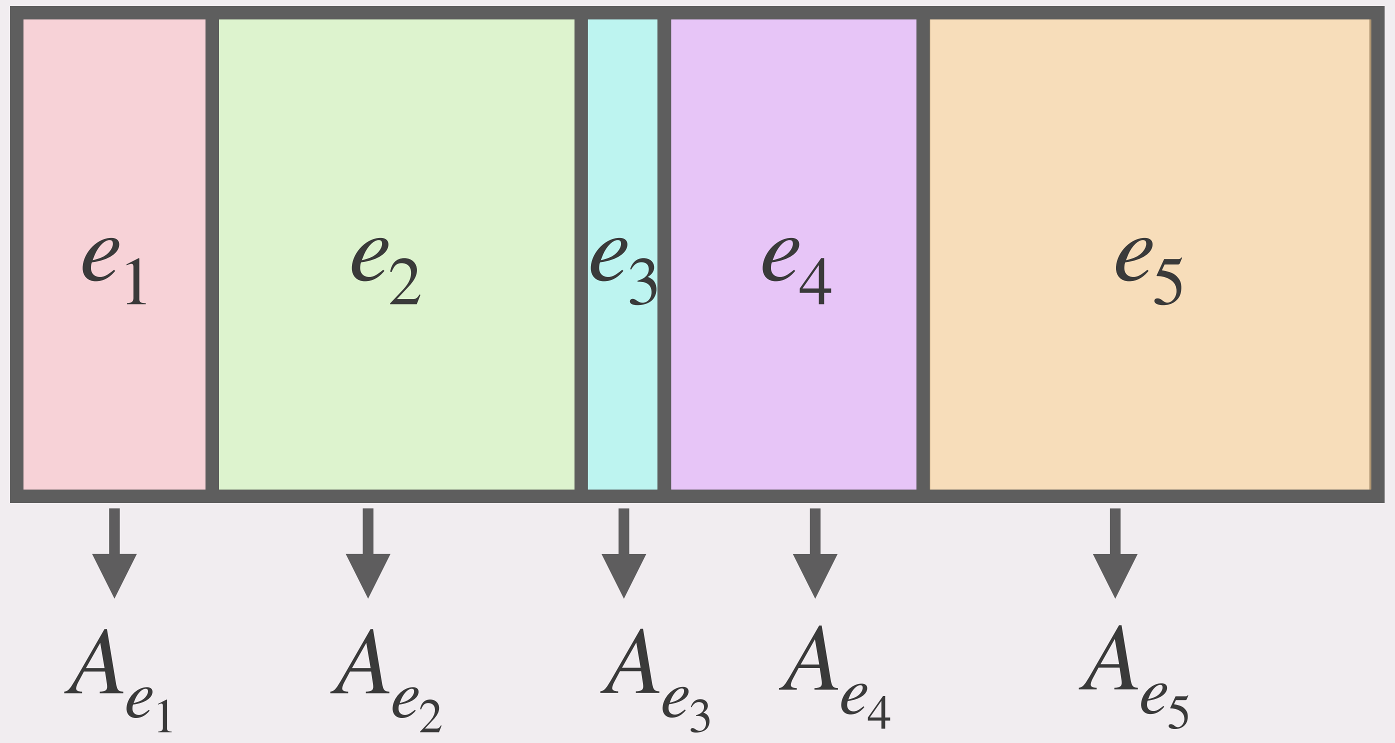
Definizione CLASSICA

Chiamiamo questo modo di definire la probabilità **CLASSICO** perché è quello a cui siamo più abituati:

- Associamo all'insieme degli eventi totali un rettangolo di area 1: $A_{tot} = 1$



- Associamo ai singoli eventi delle porzioni di questo rettangolo: A_{e_i}



$$\left.\begin{array}{l}\sum_i A_{e_i} = 1 \\ 0 < A_{e_1} < 1\end{array}\right\}$$

L'**area** è una probabilità!

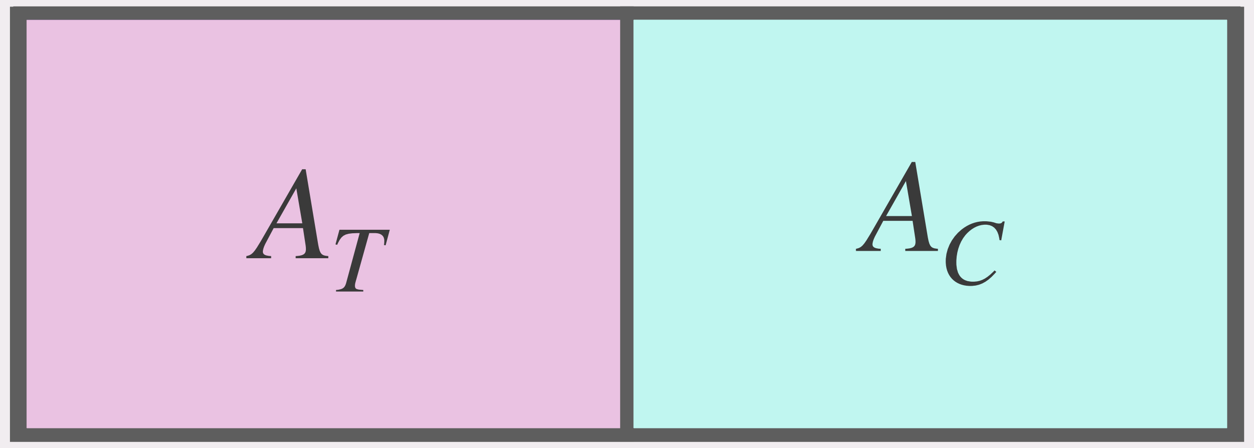
Definizione CLASSICA esempio: la moneta

- L'insieme degli eventi totali è un rettangolo di $A_{tot} = 1$

- Gli eventi possibili sono 2: TESTA e CROCE
- Possiamo avere due diverse situazioni se consideriamo una moneta:

NON truccata

$P_T = P_C$



$$\begin{cases} A_T + A_C = 1 \\ A_T = A_C \end{cases} \rightarrow A_T = A_C = \frac{1}{2}$$

Truccata

$P_C = 2P_T$

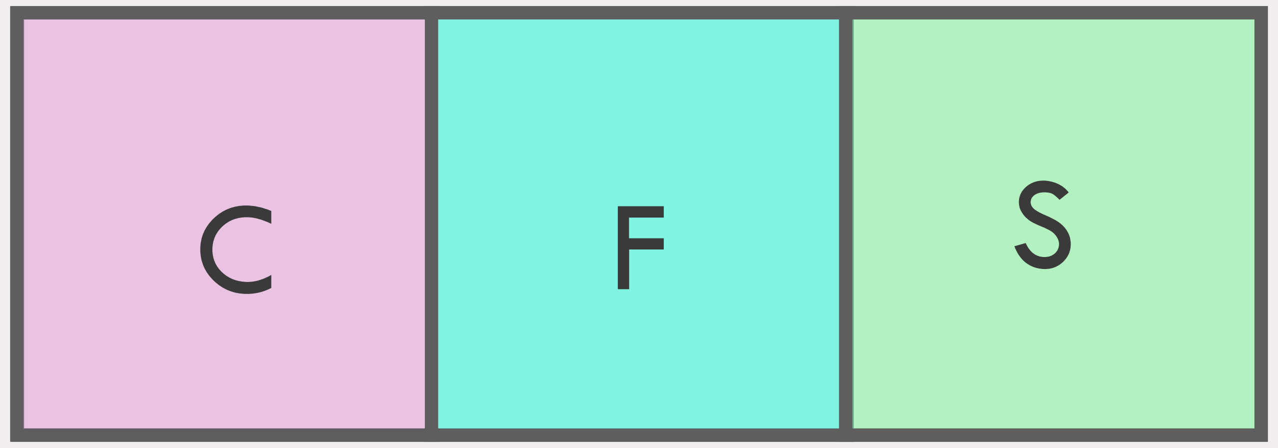
$$\begin{cases} A_T + A_C = 1 \\ A_C = 2A_T \end{cases} \rightarrow A_C = \frac{2}{3} \; ; \; A_T = \frac{1}{3}$$

Definizione CLASSICA esempio: la morra cinese

- L'insieme degli eventi totali è un rettangolo di $A_{tot} = 1$

- Gli eventi possibili sono 3: CROCE , FORBICE e SASSO
- Supponiamo che i giocatori non abbiamo una preferenza:

$$P_C = P_F = P_S$$



$$A_C \qquad A_F \qquad A_S$$

$$\left.\begin{array}{l} A_C + A_F + A_S = 1 \\ A_C = A_F = A_S \end{array}\right] \rightarrow A_C = A_F = A_S = \frac{1}{3}$$

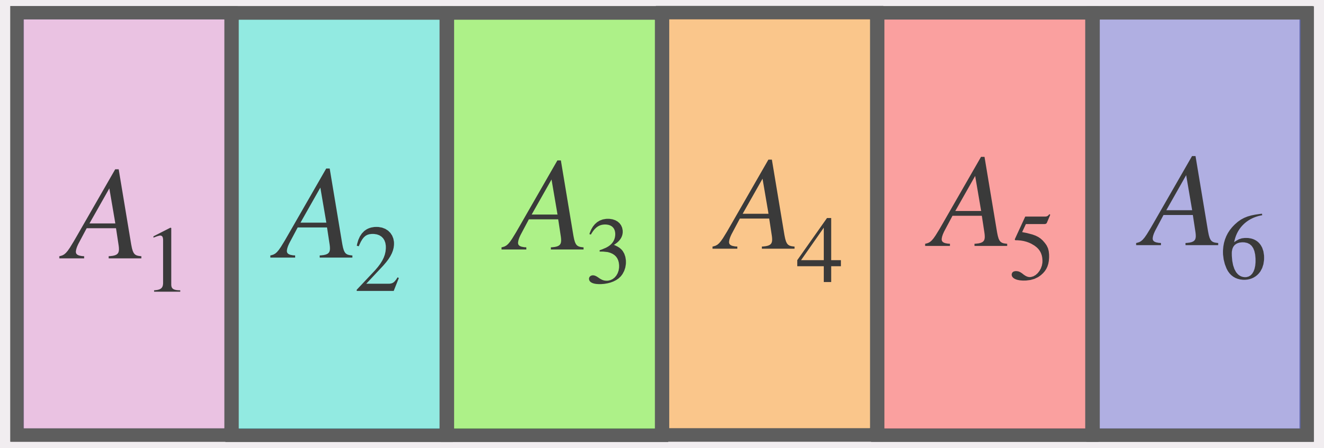
Definizione CLASSICA esempio: il dado

- L'insieme degli eventi totali è un rettangolo di $A_{tot} = 1$

- Gli eventi possibili sono 6: 1, 2, 3, 4, 5 e 6

- Supponiamo che il dado NON sia truccato

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6$$



$$\left[\begin{array}{l} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 1 \\ A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 \end{array}\right.$$

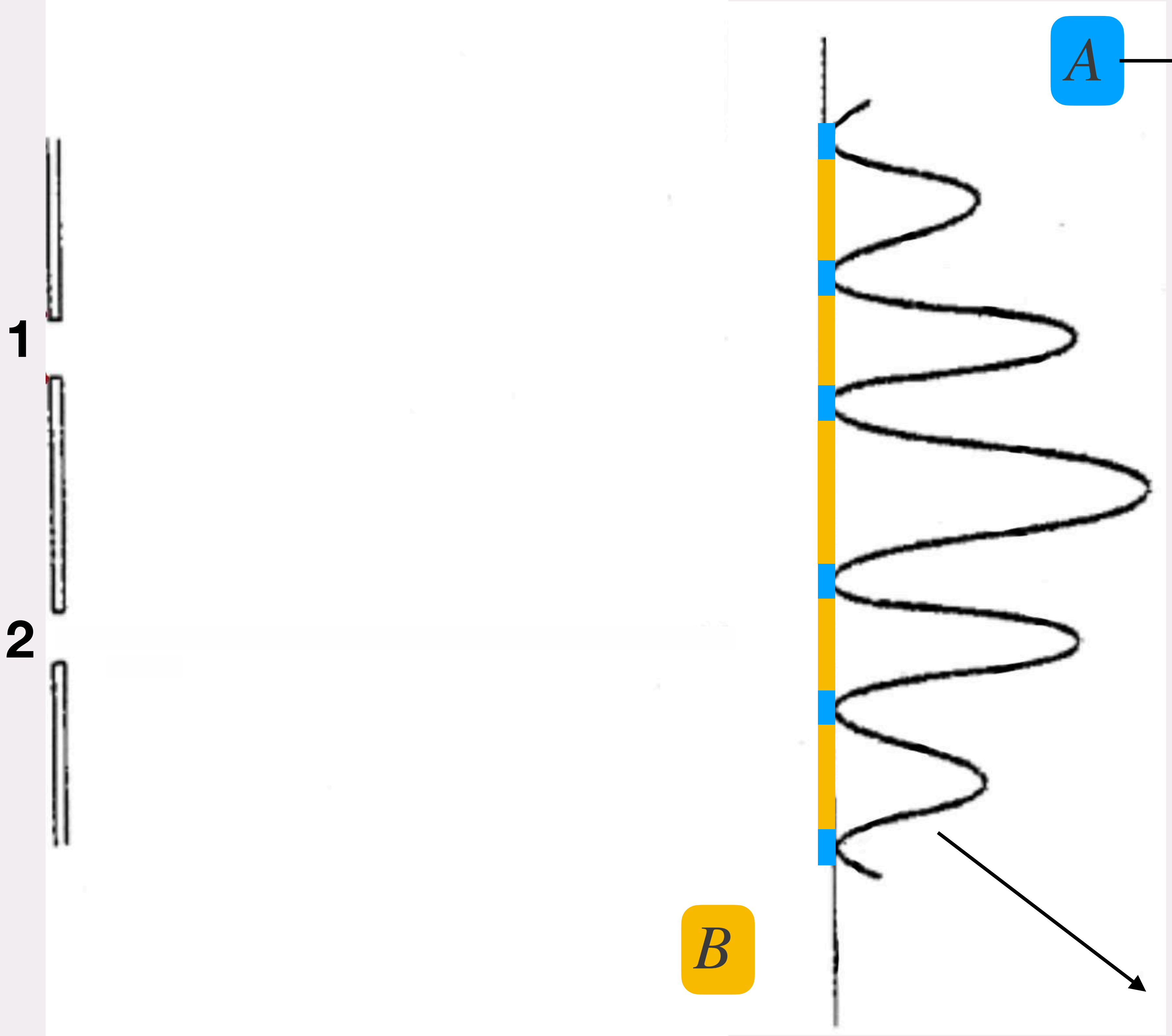
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = \frac{1}{6}$$

- Se vogliamo calcolare la probabilità di ottenere un numero pari devo sommare le aree corrispondenti a quel risultato:

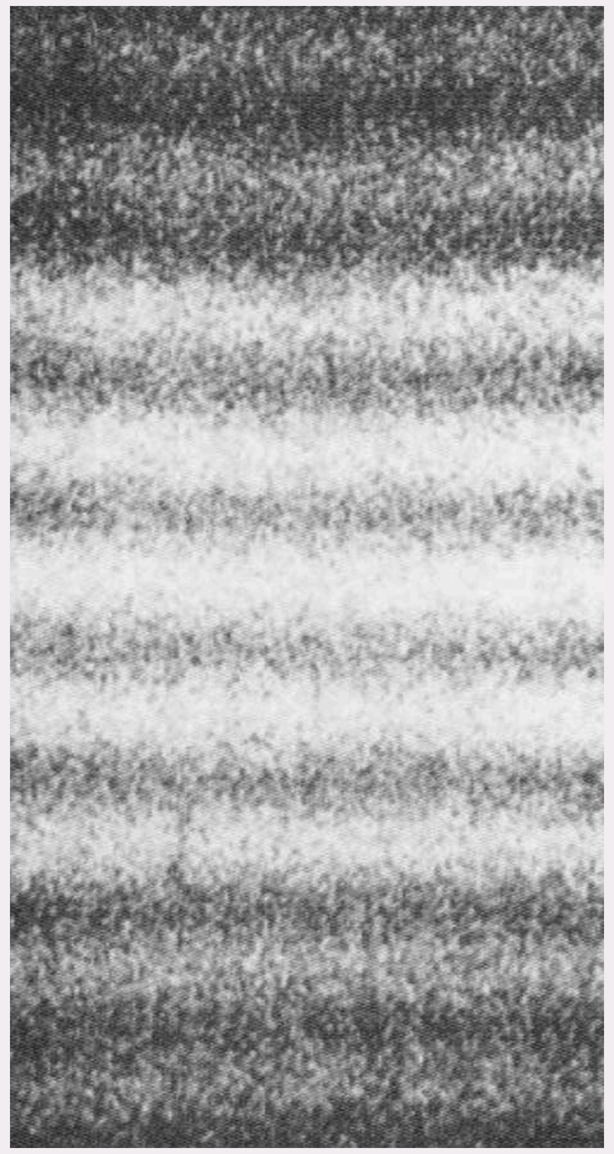
$$A_2 + A_4 + A_6 = \frac{1}{2}$$

Definizione CLASSICA: funziona??

Per andare a vedere se possiamo utilizzare questa definizione classica nella meccanica quantistica, consideriamo l'esperimento della doppia fenditura e andiamo a calcolare **qual è la probabilità di trovare un elettrone in una zona di interferenza distruttiva.**



$A \rightarrow$ Zone di interferenza distruttiva



Numero di elettroni per unità di lunghezza $\propto$ **Probabilità**

Ci aspettiamo di ottenere un valore molto piccolo!

$$P(A) \approx 0$$

Vogliamo quindi calcolare la **probabilità che un elettrone venga rivelato in una zona blu**: $P(A)$.

Classicamente avremo che questa probabilità è data da:

$$P(A) = P_1 \cdot P_{1\to A} + P_2 \cdot P_{2\to A}$$

P_1 è la probabilità che l'elettrone passi dalla fenditura 1

P_2 è la probabilità che l'elettrone passi dalla fenditura 2

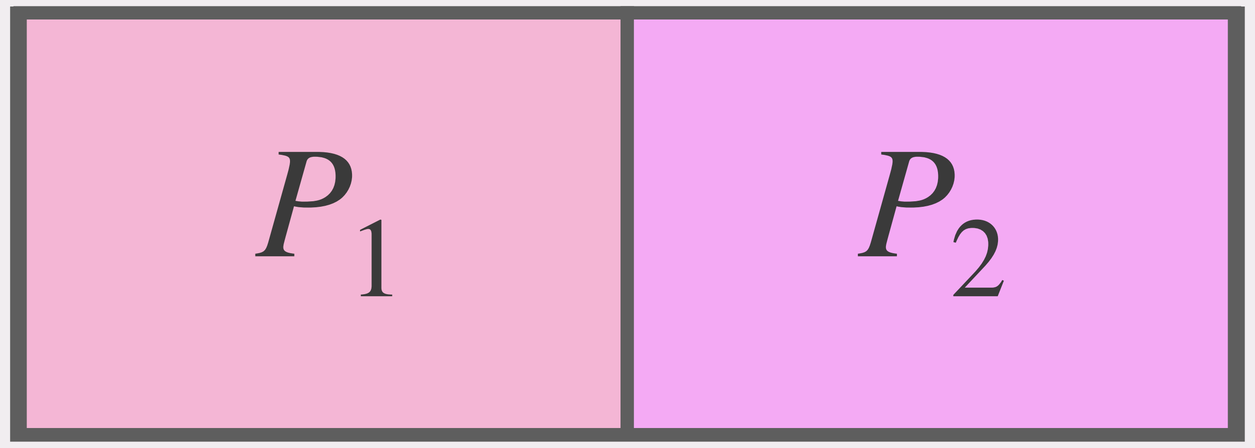
$P_{1\to A}$ è la probabilità che l'elettrone, passando dalla fenditura 1, arrivi in una zona di interferenza distruttiva A (in blu)

$P_{2\to A}$ è la probabilità che l'elettrone, passando dalla fenditura 2, arrivi in una zona di interferenza distruttiva A (in blu)

Calcolo P_1 e P_2

Data la sua **simmetria** del set up sperimentale, possiamo pensare che P_1 e P_2 siano uguali e indipendenti.

Quindi, supponendo che l'area del rettangolo rappresenti la probabilità totale di passare lo schermo con le due fenditure, avremo la seguente situazione:



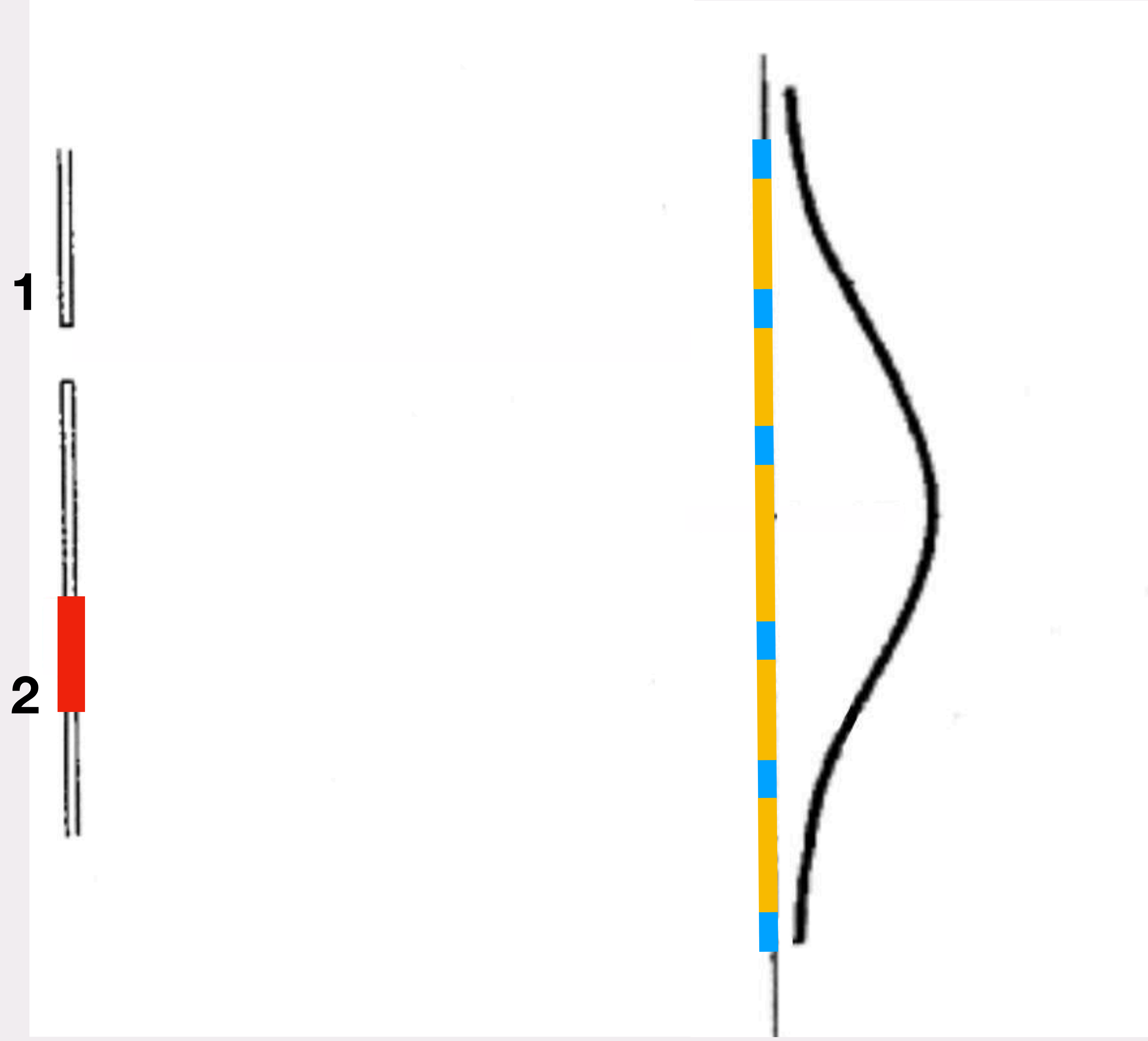
$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$$

- **Calcolo $P_{1 \to A}$**

Supponiamo ora di sapere che l'elettrone è passato dalla 1 allora, abbiamo due possibilità (indipendenti):

- arriva in una zona d'interferenza distruttiva $(P_{1 \to A})$
- arriva in una zona d'interferenza costruttiva $(P_{1 \to B})$

Per calcolare questi valori posso effettuare l'esperimento **chiudendo la fenditura 2** e guardare come si distribuiscono gli elettroni sul rivelatore. Il risultato schematizzato è il seguente:



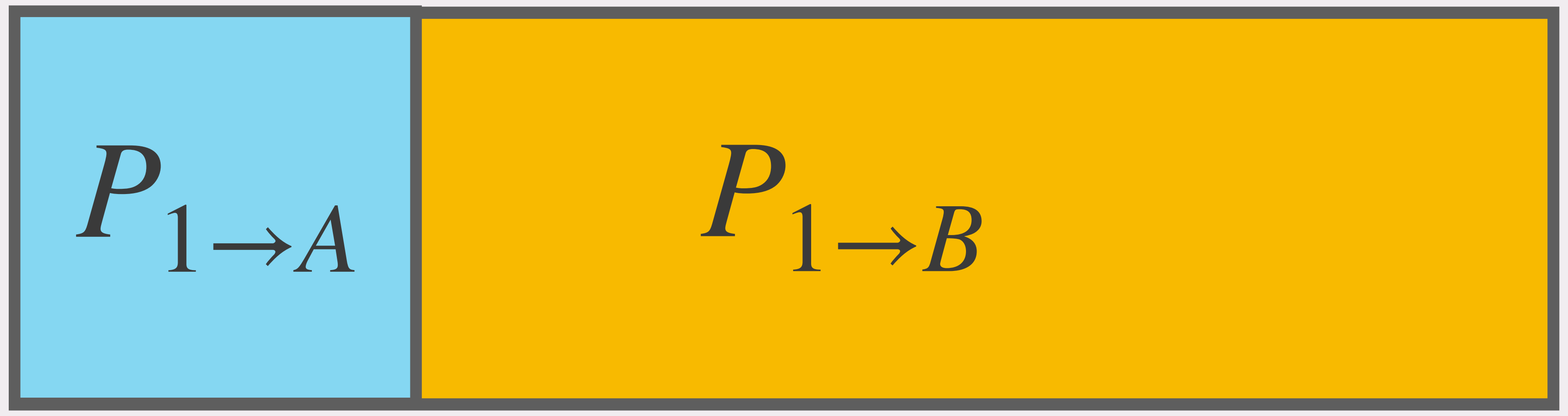
Notiamo che $P_{1 \to B} > P_{1 \to A}$

Tuttavia la probabilità di trovare l'elettrone nelle zone blu **non è cosi piccola**, e possiamo supporre sia pari a

$$P_{1 \to A} = \frac{1}{4}.$$

• Calcolo $P_{1 \to A}$

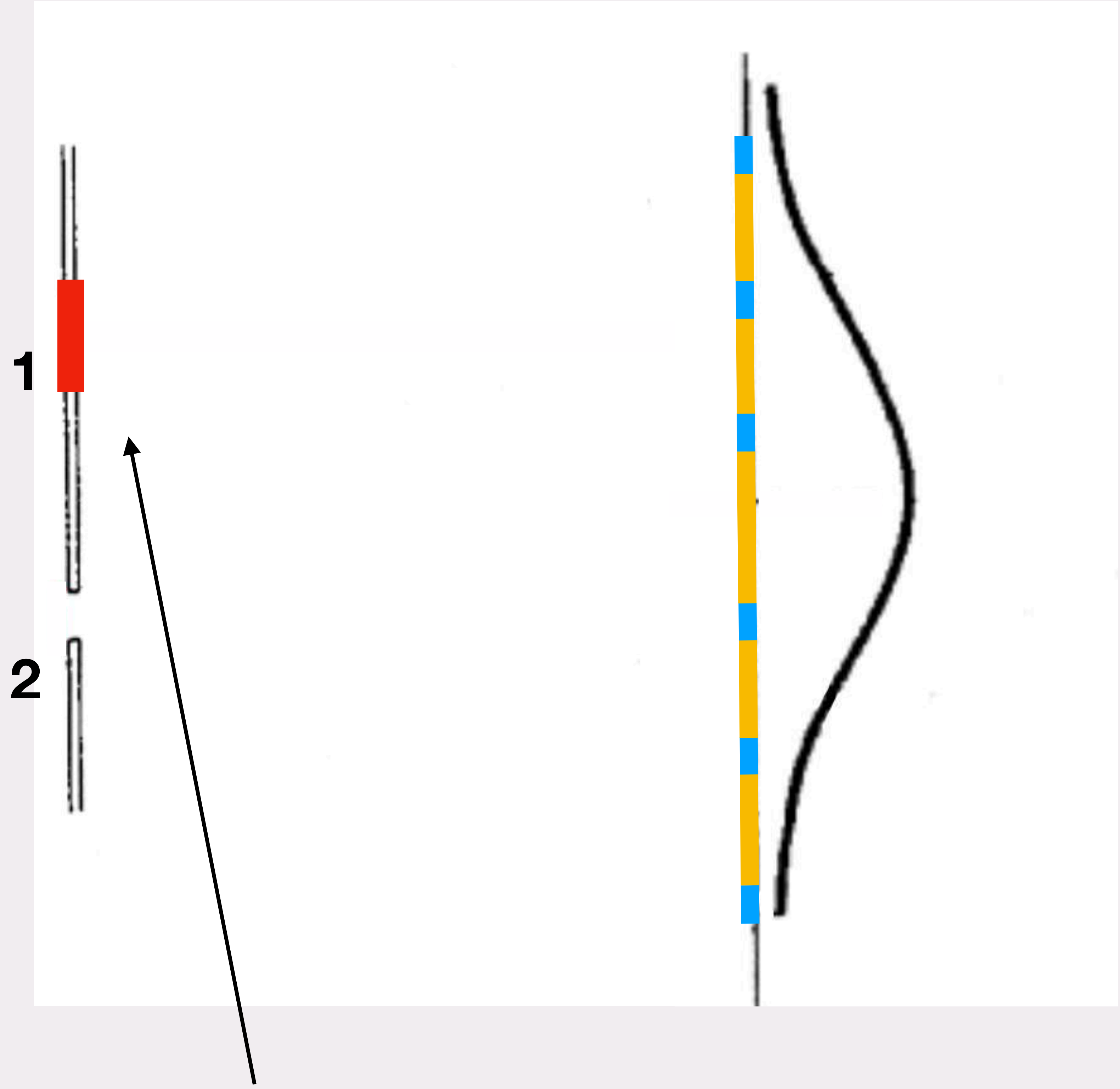
Quindi, supponendo che l'elettrone passi dalla fenditura 1 e supponendo che l'area del rettangolo rappresenti la probabilità totale di arrivare sul rivelatore, avremo la seguente situazione:



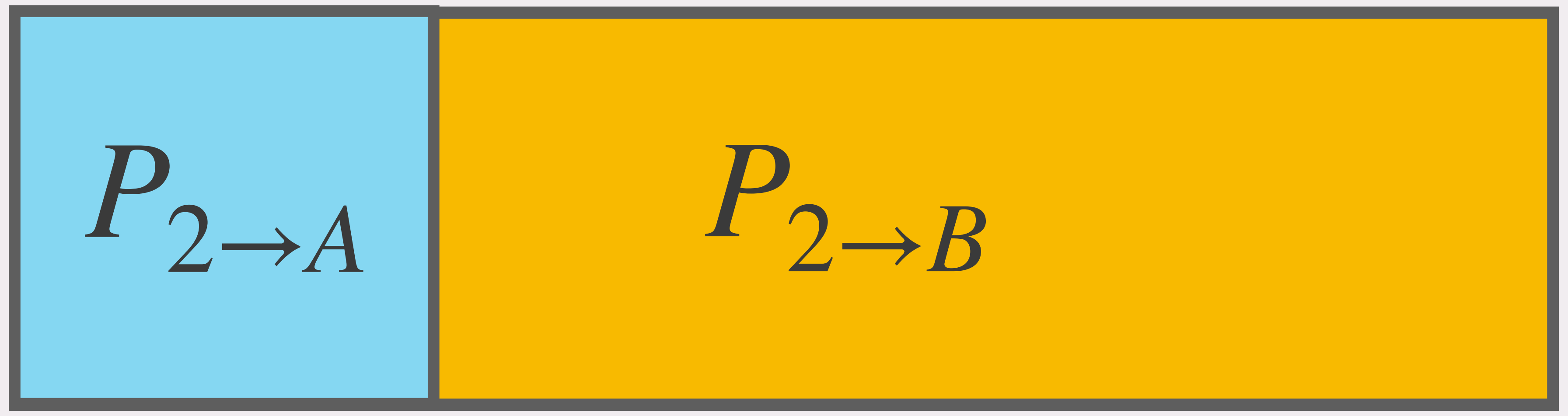
$$P_{1 \to A} = \frac{1}{4}$$

- **Calcolo $P_{2\to A}$**

Ripetiamo esattamente lo stesso ragionamento di prima e, data la simmetria del sistema, otteniamo lo stesso risultato:



Chiudiamo la fenditura 1



Probabilità che, passando per la fenditura 2, arrivi in A o in B

$$P_{2\to A} = \frac{1}{4}$$

Definizione CLASSICA: funziona??

Torniamo alla formula generale e sostituiamo i valori trovati:

$$\boxed{P(A)} = \boxed{P_1} \cdot \boxed{P_{1\to A}} + \boxed{P_2} \cdot \boxed{P_{2\to A}}$$

$$\downarrow \frac{1}{2} \qquad \downarrow \frac{1}{4} \qquad \downarrow \frac{1}{2} \qquad \downarrow \frac{1}{4}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

NON va bene!!

Sperimentalmente otteniamo un **valore molto più piccolo**!

$$\boxed{P(A) \approx 0}$$

Definizione QUANTISTICA

Dobbiamo quindi trovare un modo per definire la probabilità che vada bene in meccanica quantistica e che riesca a spiegare il risultato sperimentale della doppia fenditura.

↓

Invece di utilizzare un rettangolo di $A_{tot} = 1$, consideriamo un **segmento di lunghezza 1**:

$$l = 1$$

↓

Come ottenere da questa grandezza valori positivi la cui somma sia 1, ossia dei valori che posso definire probabilità? → **Utilizzando il TEOREMA DI PITAGORA**

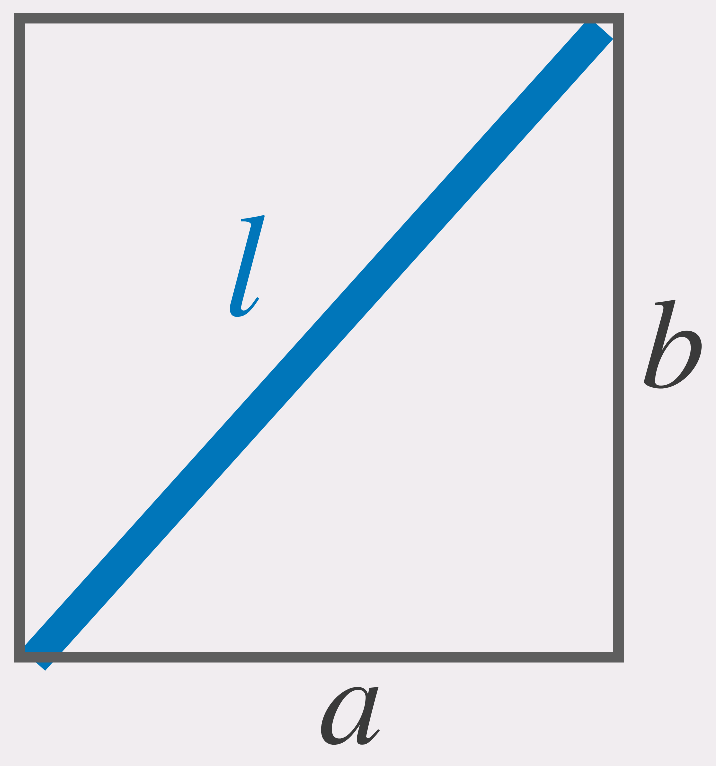
Definizione QUANTISTICA esempio: la moneta

- L'insieme degli eventi totali è rappresentato da un segmento di $l = 1$
- Gli eventi possibili sono 2: TESTA e CROCE $\longrightarrow$ <u>DUE POSSIBILITÀ</u>
- Possiamo avere due diverse situazioni se consideriamo una moneta:

NON truccata

↓

Il segmento diventa la diagonale di un quadrato

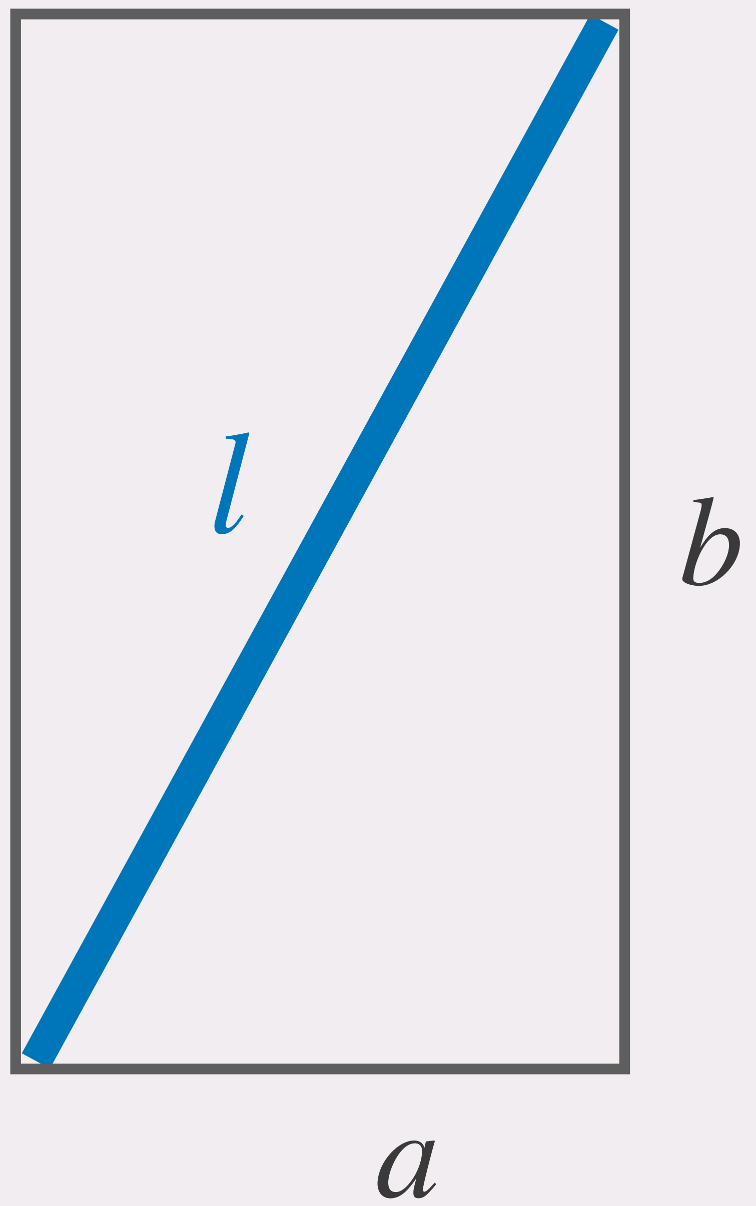


$\underline{a = b}$

Truccata

↓

Il segmento diventa la diagonale di un rettangolo



$\underline{a \neq b}$

Definizione QUANTISTICA esempio: la moneta

- In entrambi i casi abbiamo che, grazie al **teorema di Pitagora**, abbiamo che: $\longrightarrow$ $l^2 = a^2 + b^2$

I valori a^2 e b^2 hanno le caratteristiche giuste per essere delle probabilità:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ 0 < a^2 < 1 \ , \ 0 < b^2 < 1 \end{array}}$$

- $a^2 =$ probabilità che esca testa
- $b^2 =$ probabilità che esca croce

Se la moneta non è truccata: $a^2 = b^2$

Se la moneta è truccata: $a^2 \neq b^2$

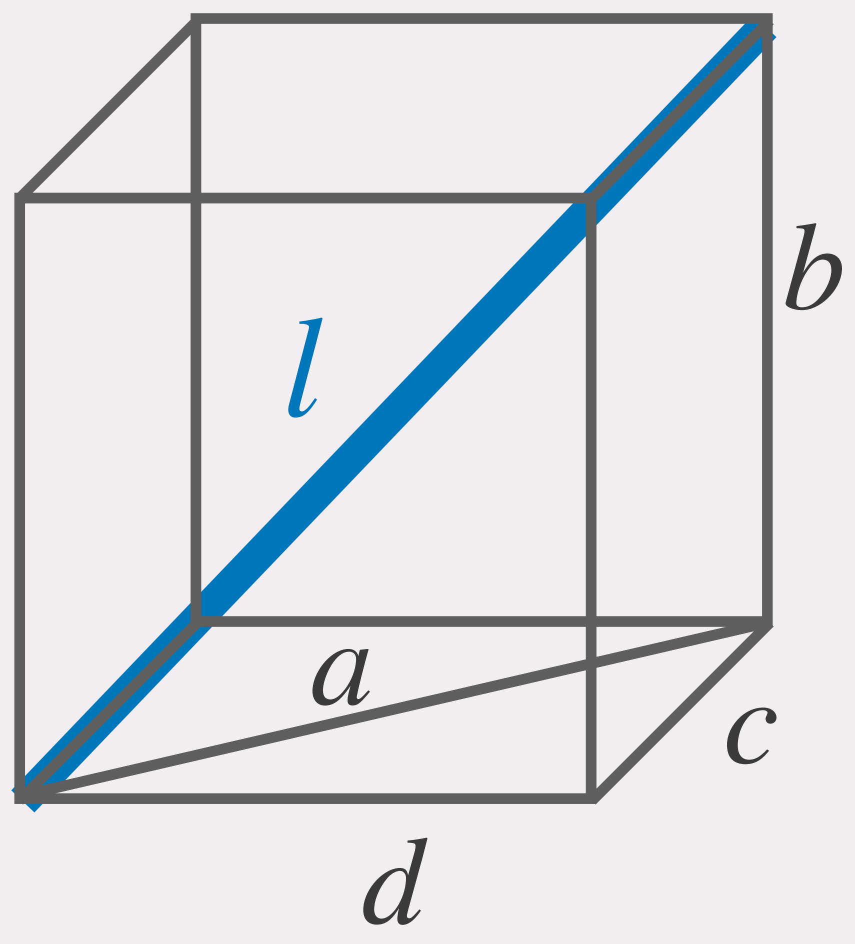
Definizione QUANTISTICA esempio: la morra cinese

- L'insieme degli eventi totali è rappresentato da un segmento di $l = 1$
- Gli eventi possibili sono 3: CROCE , FORBICE e SASSO ⟶ TRE POSSIBILITÀ

Se i giocatori non hanno una preferenza:

↓

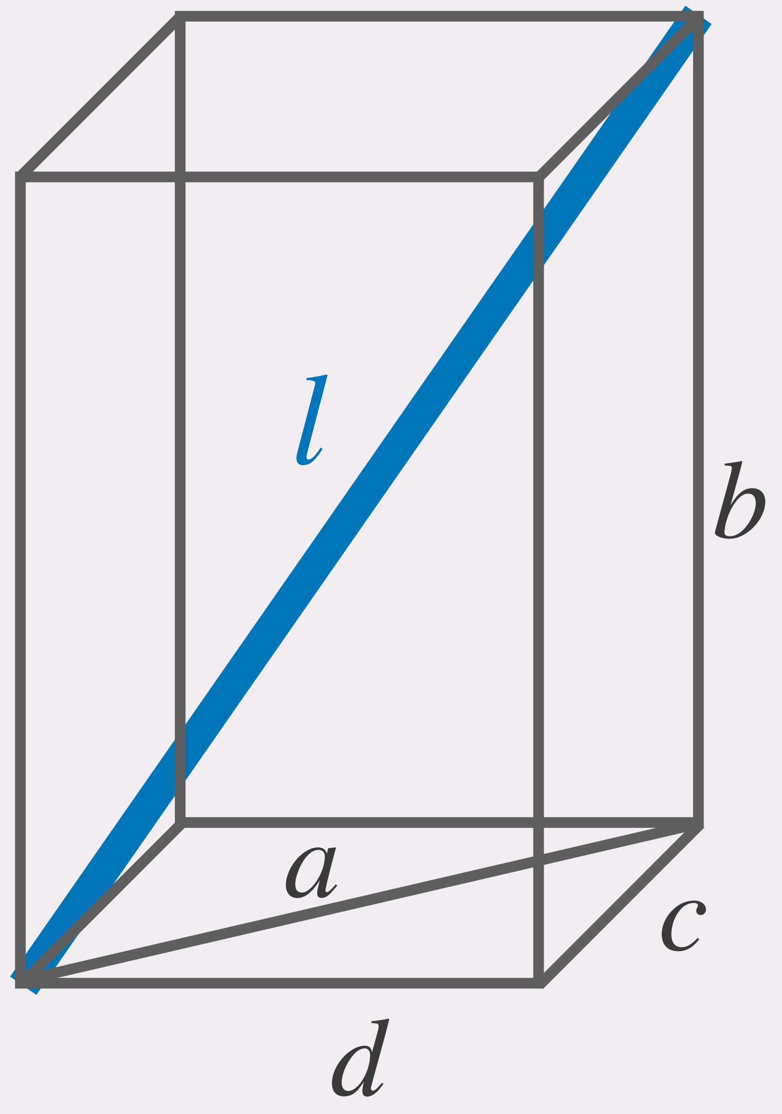
Il segmento diventa la diagonale di un cubo



Se i giocatori hanno delle preferenze:

↓

Il segmento diventa la diagonale di un parallelepipedo



Definizione QUANTISTICA esempio: la morra cinese

- In entrambi i casi abbiamo che, grazie al **teorema di Pitagora**, abbiamo che: → $l^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + b^2$

I valori c^2 , d^2 e b^2 hanno le caratteristiche giuste per essere delle probabilità:

$$c^2 + d^2 + b^2 = 1$$
$$0 < c^2 < 1 \ , \ 0 < d^2 < 1 \ , \ 0 < b^2 < 1$$

- c^2 = probabilità che esca carta
- d^2 = probabilità che esca forbice
- b^2 = probabilità che esca sasso

Se i giocatori non hanno una preferenza: $c^2 = d^2 = b^2$

Se i giocatori hanno delle preferenze: $c^2 \neq d^2 \neq b^2$

Definizione QUANTISTICA

- Con questa definizione di probabilità abbiamo collegato:

Eventi indipendenti $\longrightarrow$ Segmenti ortogonali

$\downarrow$ indipendenza — $\downarrow$ ortogonalità

- Possiamo quindi, attraverso questo metodo, **definire lo stato in meccanica quantistica** in questo modo:

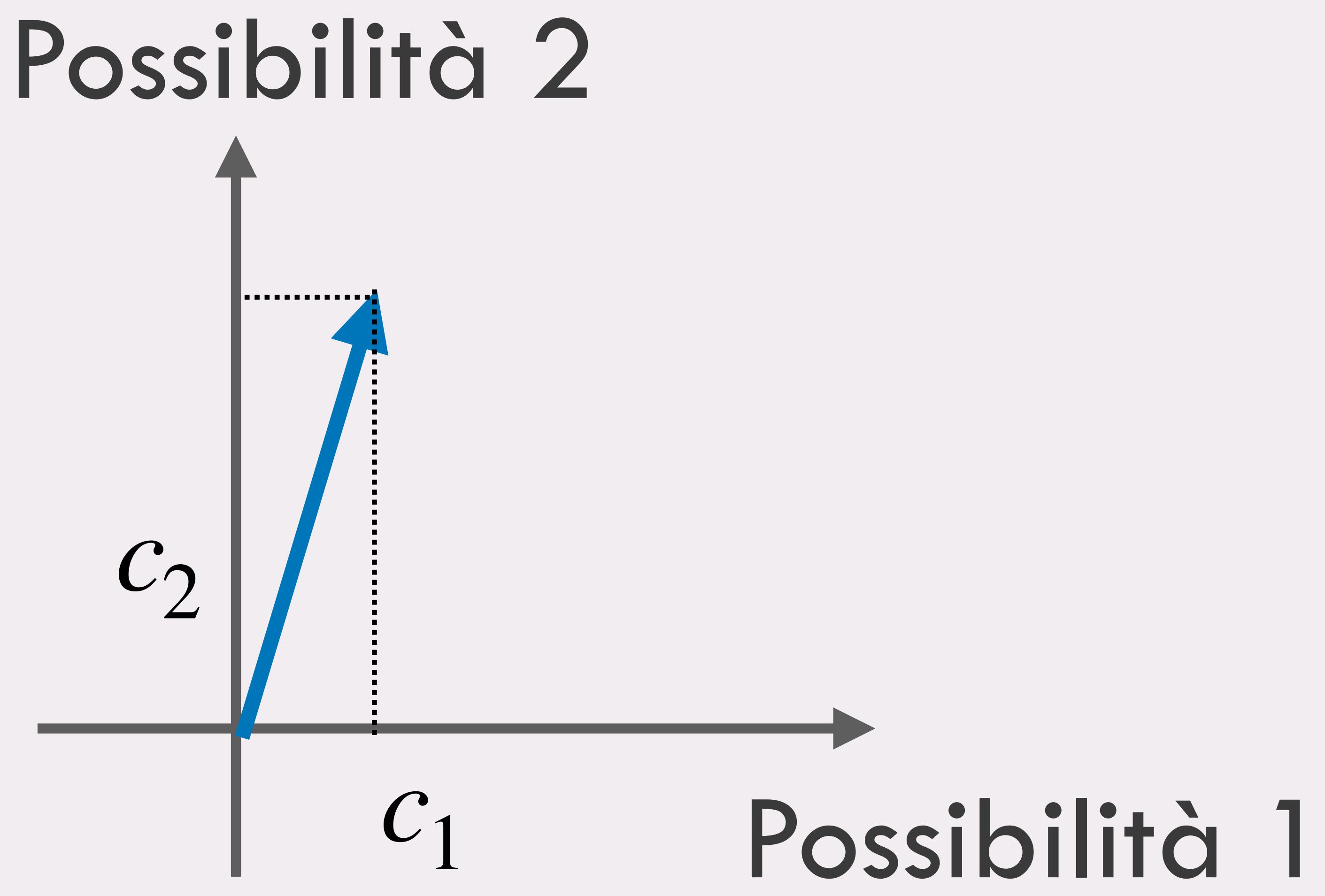
➡ Possibilità **indipendenti** = Assi **ortogonali**

➡ **Stato** del sistema = **Vettore unitario**

$$|S\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Modulo quadro delle componenti = **Probabilità**

$$\boxed{|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1}$$



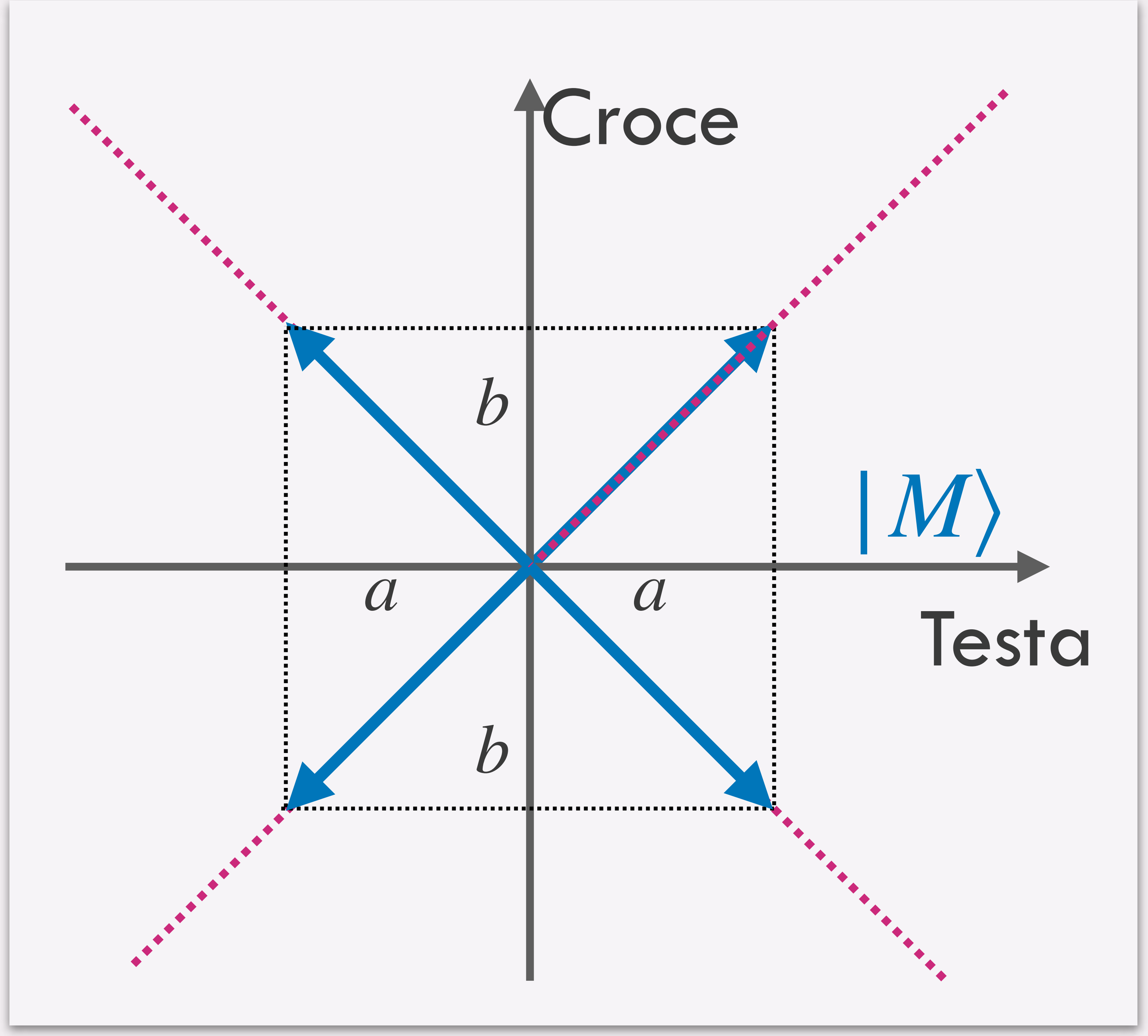
Definizione QUANTISTICA esempio: la moneta NON truccata

- **DUE** POSSIBILITÀ **INDIPENDENTI** $\longrightarrow$ **DUE** ASSI **ORTOGONALI**
- **STATO** DELLA MONETA PRIMA DEL LANCIO $\longrightarrow$ **VETTORE UNITARIO con due componenti**

$$|M\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- $a^2 =$ probabilità che esca testa
- $b^2 =$ probabilità che esca croce

$$\boxed{a^2 + b^2 = 1}$$



$$a^2 = b^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\boxed{|M\rangle = \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

Questa ambiguità per ora non importa $\longrightarrow$ Non abbiamo ancora una teoria precisa!

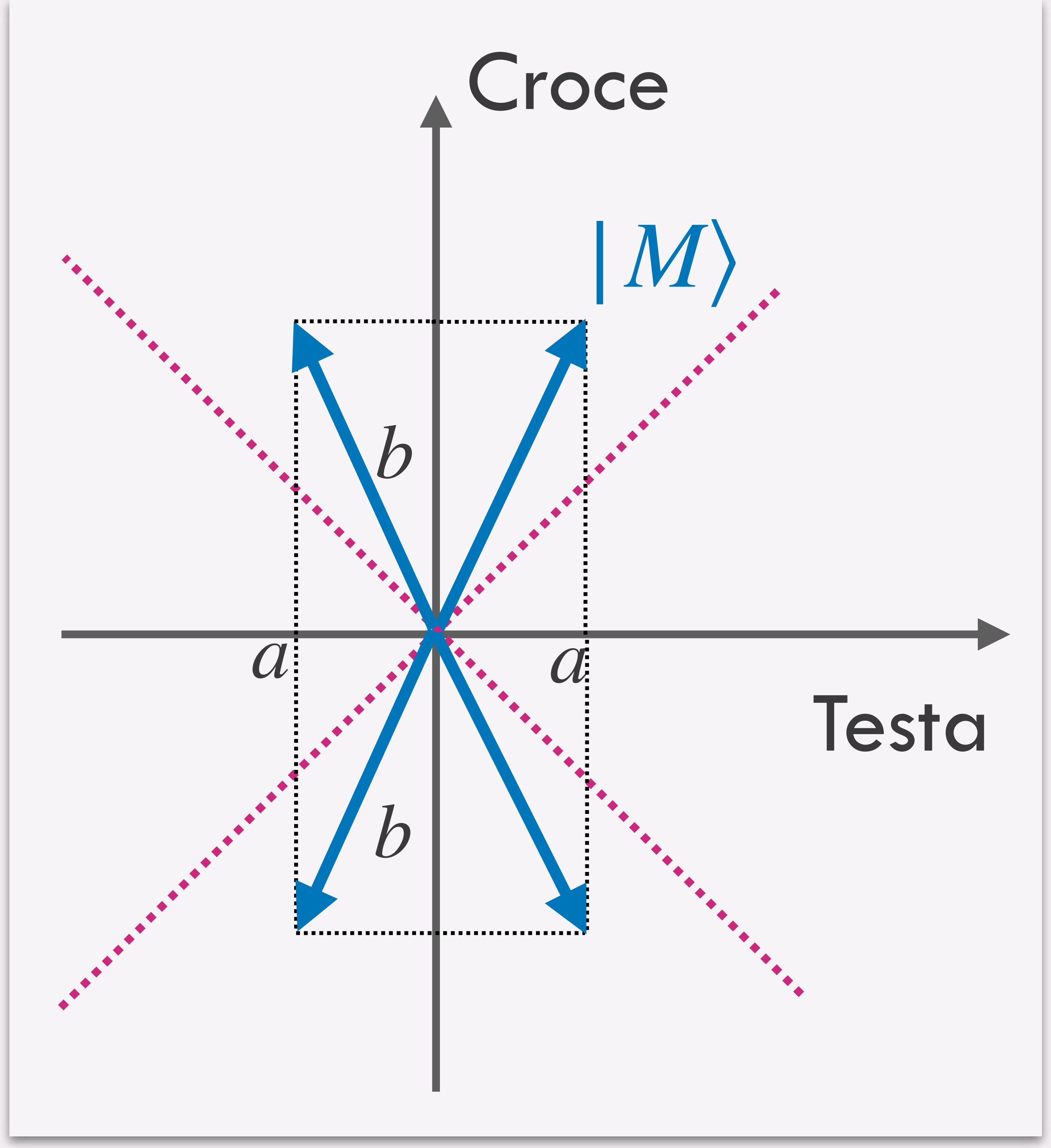
Definizione QUANTISTICA esempio: la moneta truccata

- **DUE** POSSIBILITÀ **INDIPENDENTI** ⟶ **DUE** ASSI **ORTOGONALI**
- **STATO** DELLA MONETA PRIMA DEL LANCIO ⟶ **VETTORE UNITARIO con due componenti**

$$|M\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- a^2 = probabilità che esca testa
- b^2 = probabilità che esca croce

$$\boxed{a^2 + b^2 = 1}$$



$$a^2 \neq b^2$$
$$\downarrow$$
$$b^2 = 2a^2$$
$$\downarrow$$
$$a^2 + 2a^2 = 1 \longrightarrow \begin{array}{|l} a^2 = \frac{1}{3} \\ b^2 = \frac{2}{3} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|l} a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ b = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{array}$$

$$\boxed{|M\rangle = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}}$$

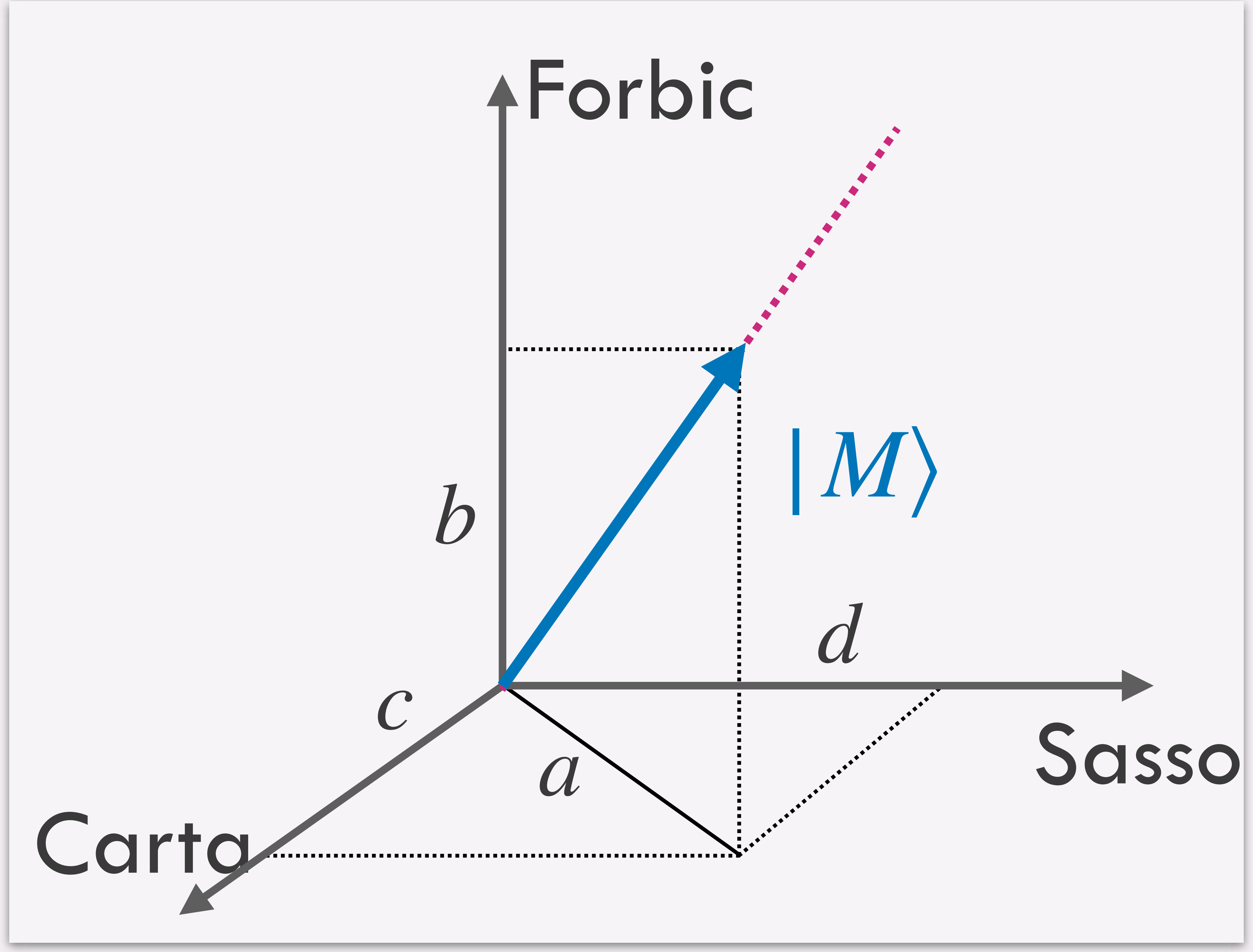
Definizione QUANTISTICA esempio: la morra cinese

- **TRE** POSSIBILITÀ **INDIPENDENTI** $\longrightarrow$ **TRE** ASSI **ORTOGONALI**
- **STATO** $\longrightarrow$ **VETTORE UNITARIO con tre componenti**

$$|M\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \\ b \end{pmatrix}$$

- c^2 = probabilità che esca carta
- d^2 = probabilità che esca forbice
- b^2 = probabilità che esca sasso

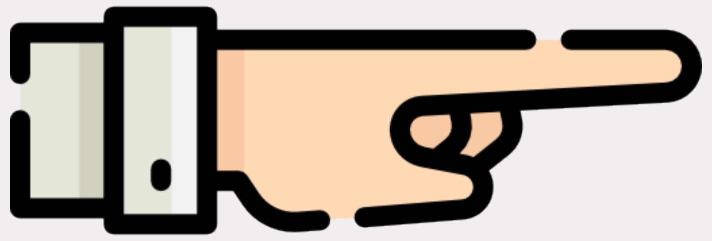
$$\boxed{c^2 + d^2 + b^2 = 1}$$



$$c^2 = d^2 = b^2 = \frac{1}{3} \longrightarrow \begin{cases} c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ d = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ b = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\boxed{|M\rangle = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$$

Definizione QUANTISTICA esempio: il dado



PROVA TU!

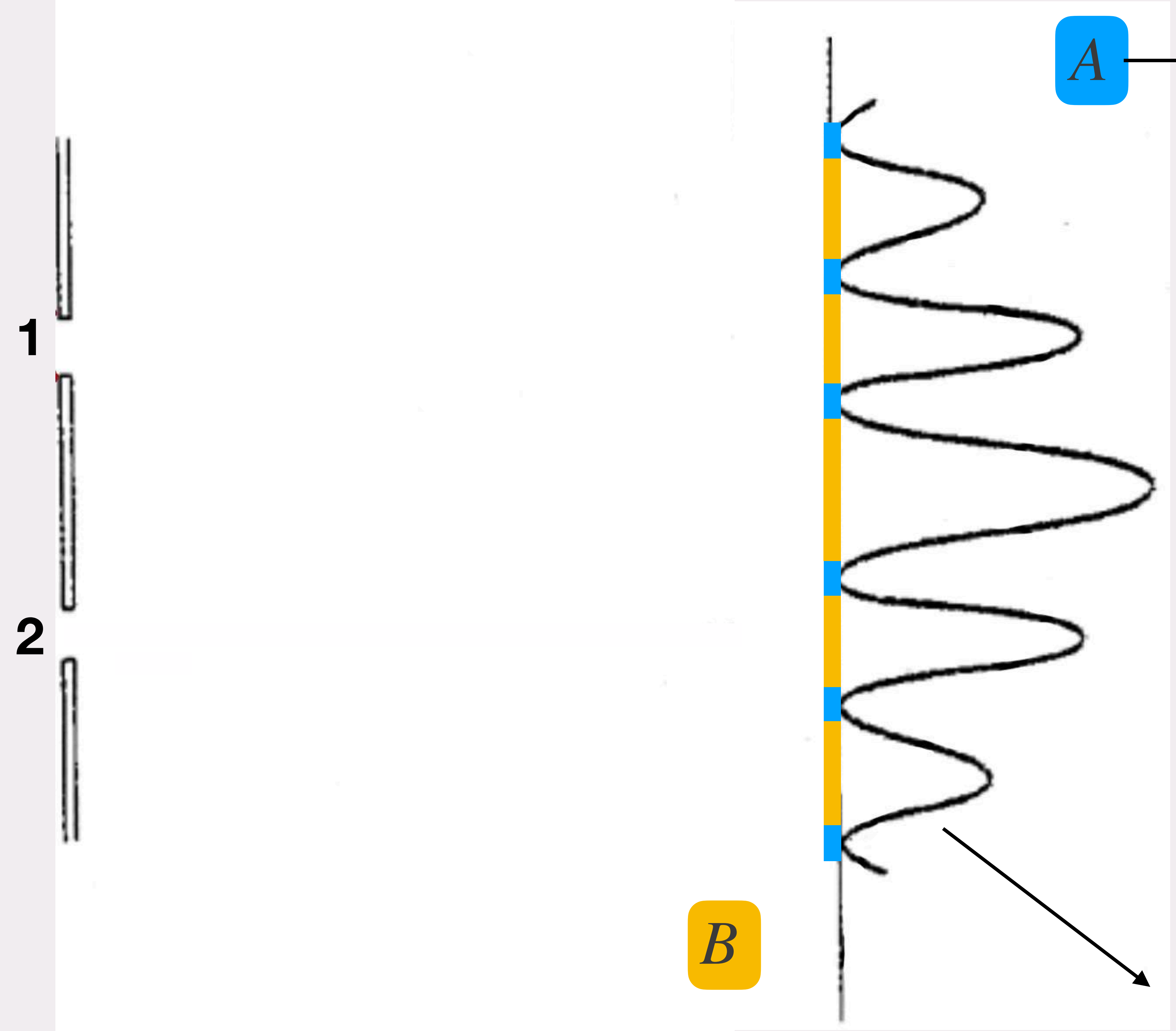
- Di quanti assi avrò bisogno nel caso del lancio di un dado classico (non truccato)?
- Come rappresento lo stato del dado?

- **SEI** POSSIBILITÀ **INDIPENDENTI** ⟶ **SEI** ASSI **ORTOGONALI**
- **STATO** DEL DADO PRIMA DEL LANCIO ⟶ **VETTORE UNITARIO con sei componenti**

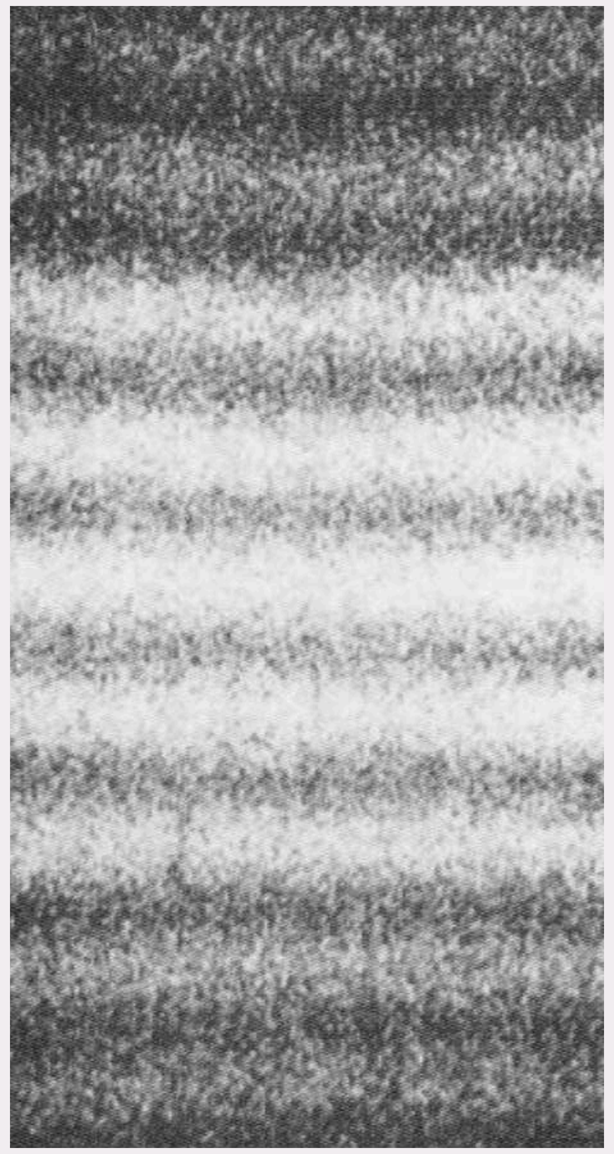
$$|D\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definizione QUANTISTICA: funziona??

Per andare a vedere se possiamo utilizzare questa definizione nella meccanica quantistica, consideriamo l'esperimento della doppia fenditura e andiamo a calcolare **qual è la probabilità di trovare un elettrone in una zona di interferenza distruttiva.**



Zone di interferenza distruttiva



Numero di elettroni per unità di lunghezza $\propto$ **Probabilità**

$$P(A) \approx 0$$

Ci aspettiamo di ottenere un valore molto piccolo!

Lo stato dell'elettrone dopo aver passato le fenditure: $|e^-\rangle$

- **DUE** POSSIBILITÀ **INDIPENDENTI** ⟶ **DUE** ASSI **ORTOGONALI**
  - Passa dalla fenditura 1
  - Passa dalla fenditura 2

  ⟶ Abbiamo visto che sono eventi indipendenti perché non passa da tutte e due contemporaneamente

- $|e^-\rangle$: **STATO** in cui si trova l'elettrone **dopo aver attraversato le fenditure** (non so quale da quale è passato) ⟶ **VETTORE UNITARIO con 2 componenti**

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

Il modulo quadro della componenti indica la **probabilità** di verificarsi di una delle possibilità

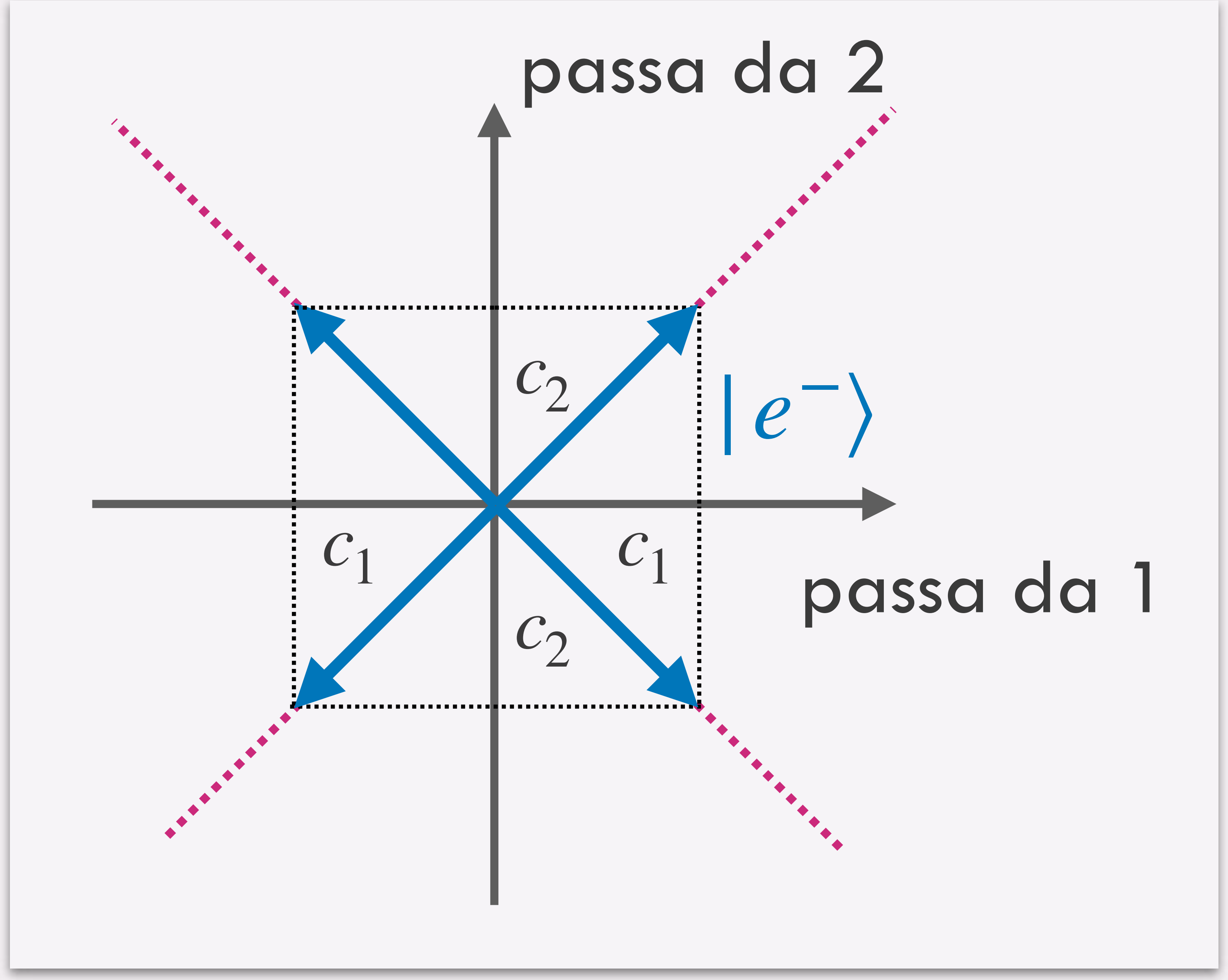
$$|e^-\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$c_1 \longrightarrow |c_1|^2 =$ probabilità che, essendo passato dalle due fenditure, sia passato dalla fenditura 1

$c_2 \longrightarrow |c_2|^2 =$ probabilità che, essendo passato dalle due fenditure, sia passato dalla fenditura 2

- Calcoliamo le componenti del vettore di **STATO** $\longrightarrow$

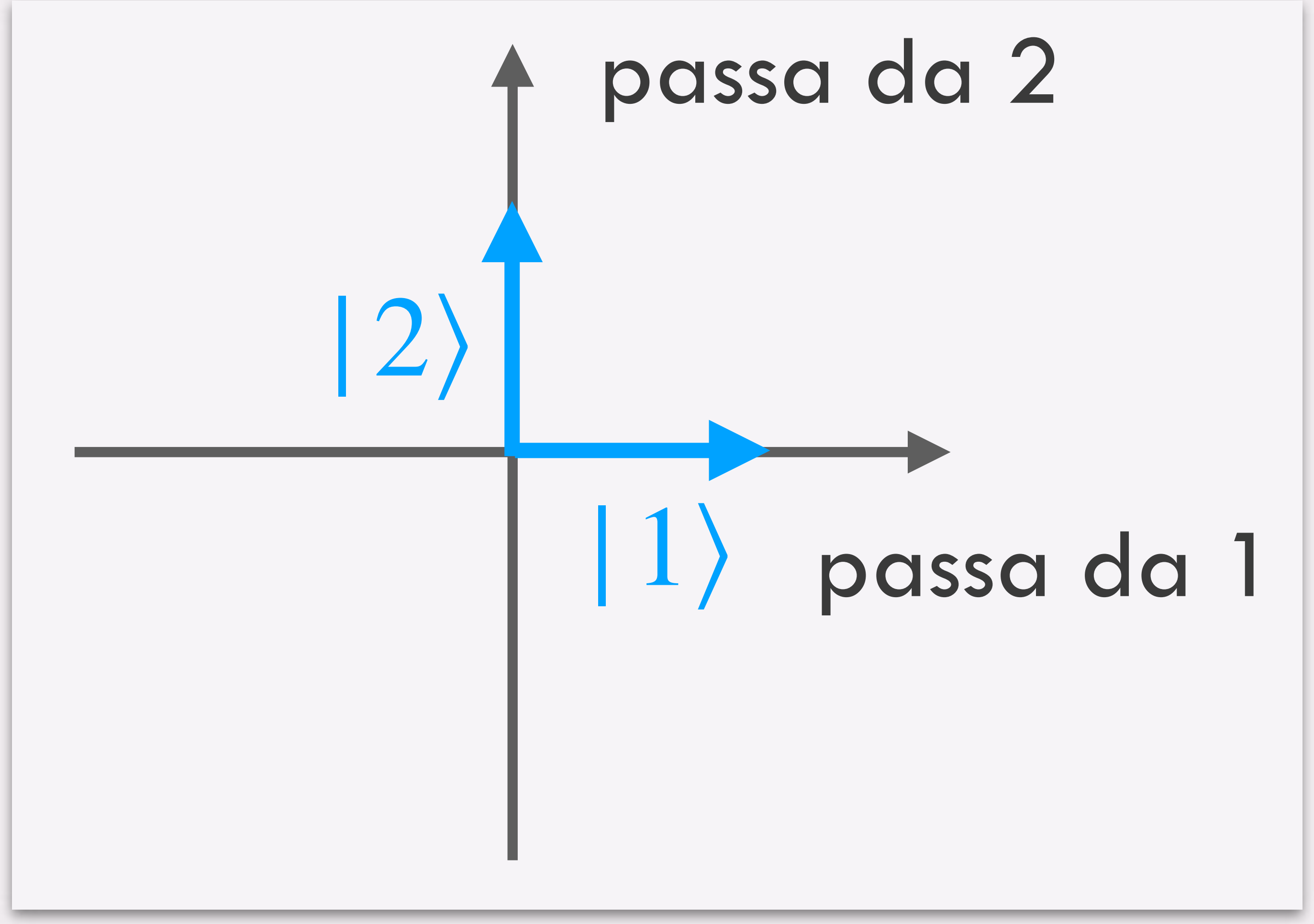
$$\begin{cases} |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \\ |c_1|^2 = |c_2|^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad c_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad c_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\boxed{|e^-\rangle = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

- Lo **STATO** $|e^-\rangle$ dell'elettrone oltre che come vettore, posso anche scriverlo come **sovrapposizione di due stati**, che chiamiamo **stati base**, e che rappresentano altri stati possibili in cui si può trovare l'elettrone:
  - $|1\rangle$ = stato in cui si trova l'elettrone **se misuro che è passato dalla fenditura 1**
  - $|2\rangle$ = stato in cui si trova l'elettrone **se misuro che è passato dalla fenditura 2**

- Questi **stati base** sono anch'essi vettori unitari e sono diretti lungo gli assi:



Anche il modulo quadro delle componenti di questi vettori rappresenta la **probabilità**

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow \text{diretto lungo l'asse che identifica la possibilità “passa da 1”} \longrightarrow |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow \text{diretto lungo l'asse che identifica la possibilità “passa da 2”} \longrightarrow |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gli stati base possiamo pensarli come dei **versori che individuano gli assi**

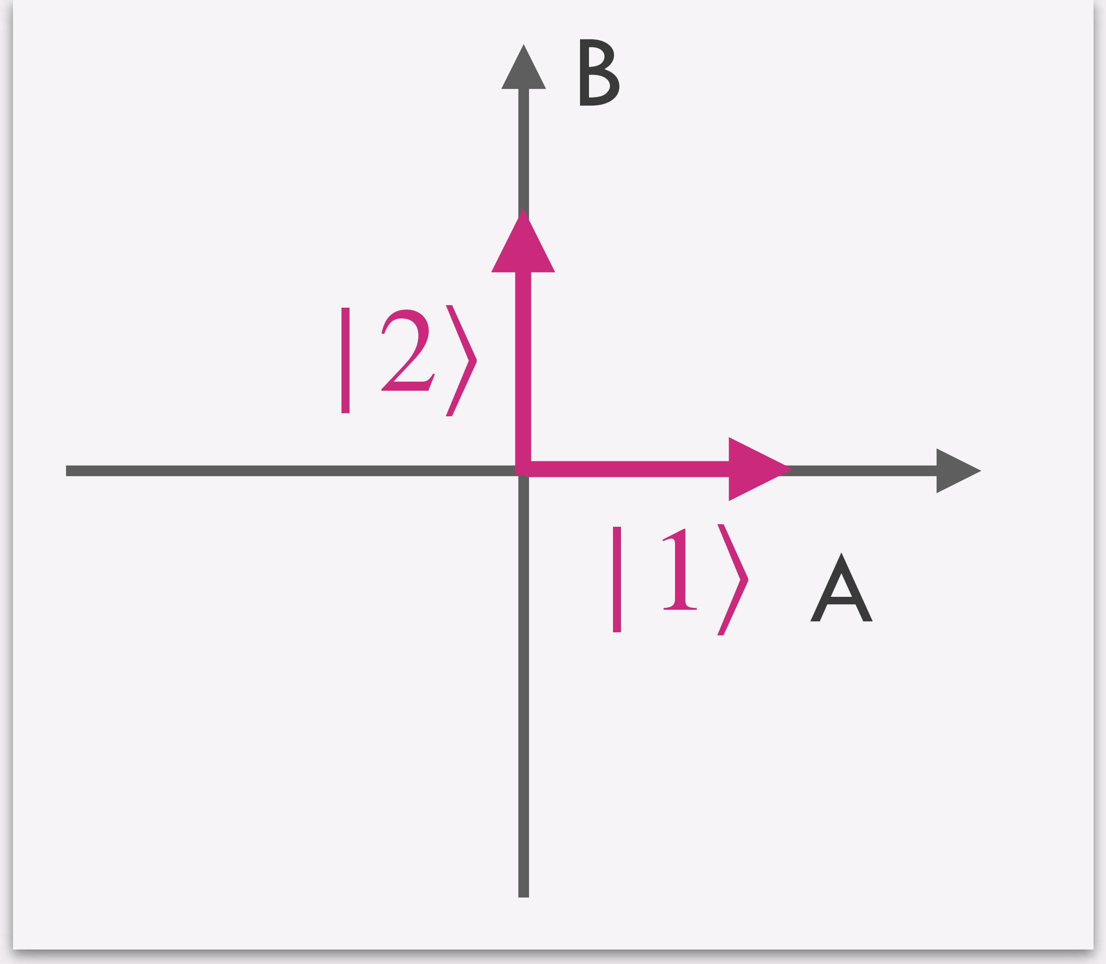
- Posso quindi scrivere lo **STATO** $|e^-\rangle$ come **sovrapposizione dei due stati base**:

$$|e^-\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)$$

Come scrivere lo stato $|1\rangle$

- Se ci concentriamo sullo stato $|1\rangle$, ossia lo stato in cui si trova l'elettrone quando sappiamo che ha attraversato la fenditura 1, possiamo scriverlo come **sovrapposizione** di altri due stati:
  - $|A\rangle$ = stato in cui si trova l'elettrone **se è stato rivelato in una zona di interferenza distruttiva**
  - $|B\rangle$ = stato in cui si trova l'elettrone **se è stato rivelato in una zona di interferenza costruttiva**

- Questi due nuovi stati base, identificano i due assi che corrispondono alle possibilità che ha l'elettrone:
  - viene rivelato in A (zona d'interferenza distruttiva)
  - viene rivelato in B (zona d'interferenza costruttiva)



Come scrivere lo stato $|1\rangle$

- Posso quindi scrivere lo stato $|1\rangle$ come **sovrapposizione**:

$$|1\rangle = \boxed{c_{1\to A}}\,|A\rangle + \boxed{c_{1\to B}}\,|B\rangle$$

$|c_{1\to A}|^2$

probabilità che, passando per 1, venga rivelato in A

$|c_{1\to B}|^2$

probabilità che, passando per 1, venga rivelato in B

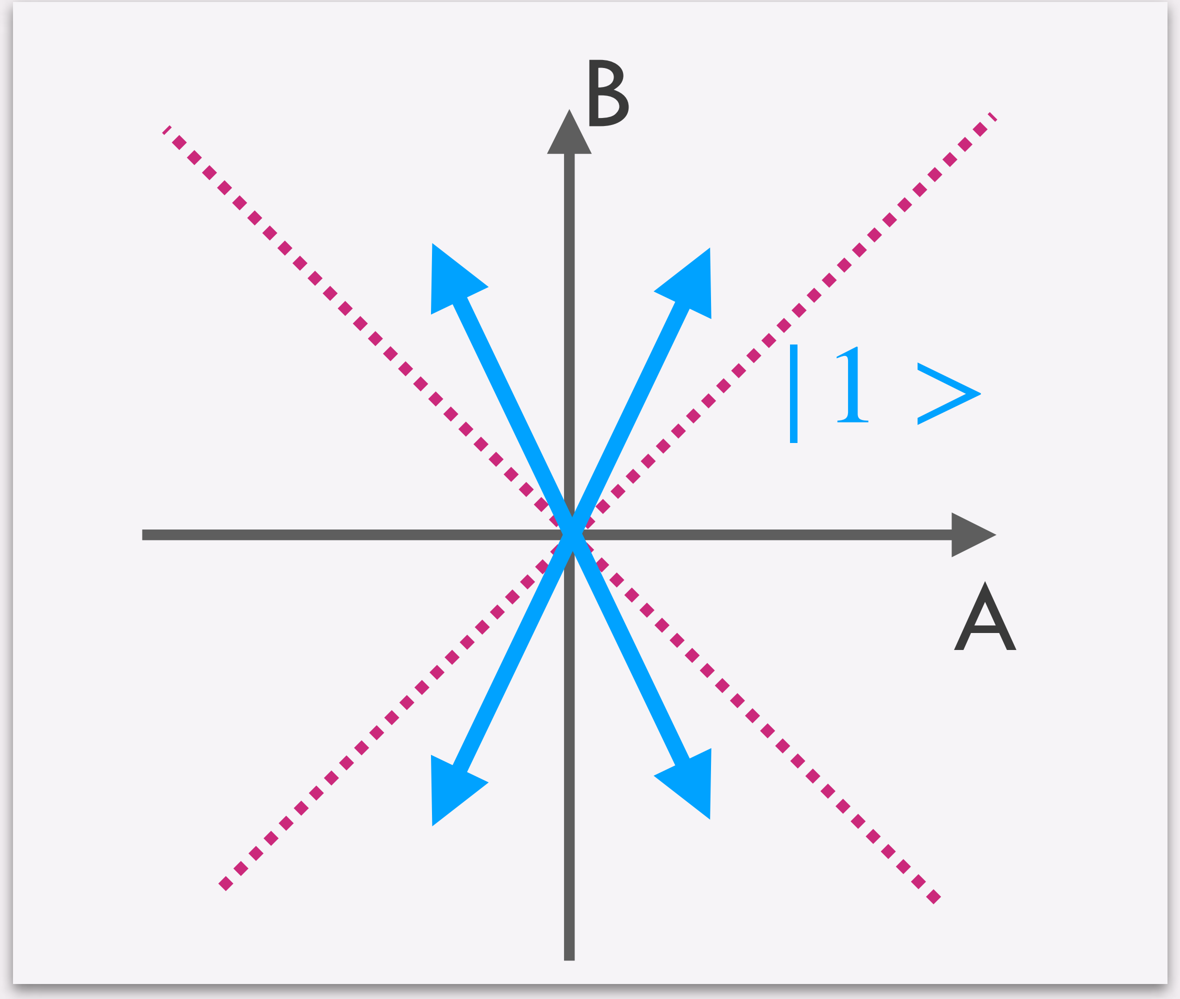
Deve valere sempre:

$$|c_{1\to A}|^2 + |c_{1\to B}|^2 = 1$$

Sappiamo che: $|c_{1\to A}|^2 \ll |c_{1\to B}|^2$

- Se vogliamo scriverlo come vettore allora abbiamo che:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} c_{1\to A} \\ c_{1\to B} \end{pmatrix}$$



Come scrivere lo stato $|2\rangle$

- Se ci concentriamo sullo stato $|2\rangle$, ossia lo stato in cui si trova l'elettrone quando sappiamo che ha attraversato la fenditura 2, possiamo fare lo stesso ragionamento precedente:
  - Se vogliamo scrivere lo stato $|2\rangle$ come **sovrapposizione**:

$$|2\rangle = c_{2\to A}\,|A\rangle + c_{2\to B}\,|B\rangle$$

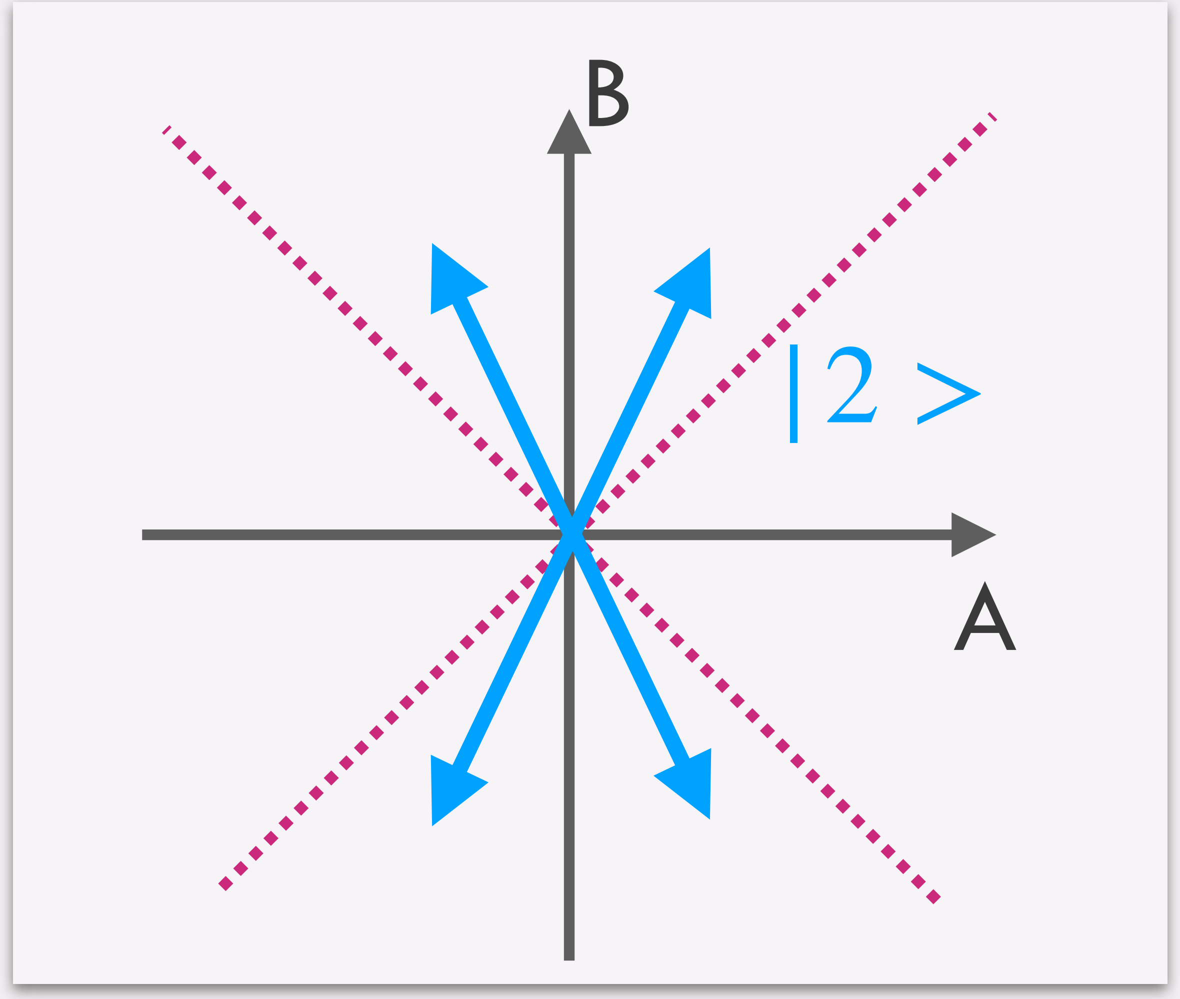
$|c_{2\to A}|^2$ **probabilità** che, passando per 2, venga rivelato in A

$|c_{2\to B}|^2$ **probabilità** che, passando per 2, venga rivelato in B

Deve valere sempre:
$$|c_{2\to A}|^2 + |c_{2\to B}|^2 = 1$$

Sappiamo che: $|c_{2\to A}|^2 \ll |c_{2\to B}|^2$

  - Se vogliamo scriverlo come vettore: $|2\rangle = \begin{pmatrix} c_{2\to A} \\ c_{2\to B} \end{pmatrix}$



Definizione QUANTISTICA: funziona??

- Mettiamo insieme quello che abbiamo trovato:

$$|e^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)$$

$$|1\rangle = c_{1\to A}\,|A\rangle + c_{1\to B}\,|B\rangle$$

$$|2\rangle = c_{2\to A}\,|A\rangle + c_{2\to B}\,|B\rangle$$

- Otteniamo:

$$|e^-\rangle = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{1\to A} + c_{2\to A}\right)}\,|A\rangle + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{1\to B} + c_{2\to B}\right)}\,|B\rangle$$

$$\frac{1}{2}\left|c_{1\to A} + c_{2\to A}\right|^2$$

probabilità di rivelare l'elettrone in una zona di interferenza distruttiva

$$\frac{1}{2}\left|c_{1\to B} + c_{2\to B}\right|^2$$

probabilità di rivelare l'elettrone in una zona di interferenza costruttiva

Definizione QUANTISTICA: funziona??

$$\boxed{P(A)} = \frac{1}{2}\left| c_{1\to A} + c_{2\to A} \right|^2$$

Questa espressione può assumere un valore molto piccolo??

$$\boxed{P(A) \approx 0} \quad ??$$

SI

Infatti $c_{1\to A}$ e $c_{2\to A}$ possono essere anche negativi

Solo le probabilità devono essere positive:

$$0 \leq |c_{1\to A}|^2 \leq 1$$

$$0 \leq |c_{2\to A}|^2 \leq 1$$

Definizione CLASSICA

$$P(A) = P_1 \cdot P_{1\to A} + P_2 \cdot P_{2\to A}$$

Utilizziamo lo stesso linguaggio che abbiamo usato per la probabilità quantistica

$$= |c_1|^2 \cdot |c_{1\to A}|^2 + |c_2|^2 \cdot |c_{2\to A}|^2 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(|c_{1\to A}|^2 + |c_{2\to A}|^2 \right)}$$

Definizione QUANTISTICA

$$P(A) = \boxed{\frac{1}{2}\left| c_{1\to A} + c_{2\to A} \right|^2}$$

SONO DIVERSE!!

La MECCANICA QUANTISTICA

Stato e spazio in MQ

- Spazio → **Spazio lineare e complesso**
- Stato → **Vettore che appartiene a questo spazio**

- **Che dimensioni ha lo spazio?**
- **Come definire gli assi?**
- **Come definire le componenti del vettore?**

→ Il modulo quadro è legato alla **probabilità**

Gli assi, quindi le dimensioni dello spazio, si riferiscono alle **domande che ci poniamo sul sistema**, alle **possibilità** che ha il quanto:

"È passato dalla fenditura 1 o dalla 2?"
"È stato trasmesso o riflesso?" (Beam splitter)
"È polarizzato verticalmente o orizzontalmente?" (Calcite)

→ SPAZI 2D

Le possibilità non sono sempre solo due, ma possono essere più numerose, anche **infinite**:
"dove so trova l'elettrone??"

SPAZIO ∞D

Quando il numero di possibilità aumenta, aumentano le dimensioni dello spazio e quindi il numero degli assi..

Abbiamo visto che gli **assi**, riferendosi a possibilità indipendenti, **sono tutti ortogonali tra di loro**

- Finché ci troviamo in uno **spazio reale 2D/3D** l'ortogonalità possiamo vederla geometricamente: gli assi formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$
- Quando invece proviamo ad immaginare uno **spazio complesso** (già in 2D) oppure uno **spazio reale con più di 4D**, allora non posso più riferirmi all'angolo per definire l'ortogonalità.

Ci serve uno strumento matematico che ci permetta di fare questo!!

PRODOTTO SCALARE

Due vettori $|A\rangle$ e $|B\rangle$ **sono ortogonali quanto il loro prodotto scalare è nullo:**

$$\boxed{\langle A|B\rangle = 0}$$

Se $|A\rangle$ e $|B\rangle$ sono due versori che indicano la direzione di due assi, allora se il loro prodotto scalare è nullo, sappiamo che i due assi sono ortogonali anche se non siamo in grado di immaginarci lo spazio.

IL PRODOTTO SCALARE con vettori reali

$|A\rangle$ e $|B\rangle$ sono due vettori reali (le loro componenti: $a_1, a_2, a_3 \ldots \quad , \quad b_1, b_2, b_3 \ldots \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{\langle A|B\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots}$$

IL PRODOTTO SCALARE con vettori complessi

$|A\rangle$ e $|B\rangle$ sono due vettori complessi (le loro componenti: $a_1, a_2, a_3 \ldots \quad , \quad b_1, b_2, b_3 \ldots \in \mathbb{C}$)

$$\boxed{\langle A|B\rangle = a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + a_3^*b_3 + \ldots}$$

La SPAZIO DI HILBERT

Spazio che ha le seguenti caratteristiche:

Lineare

Complesso

Dotato di prodotto scalare