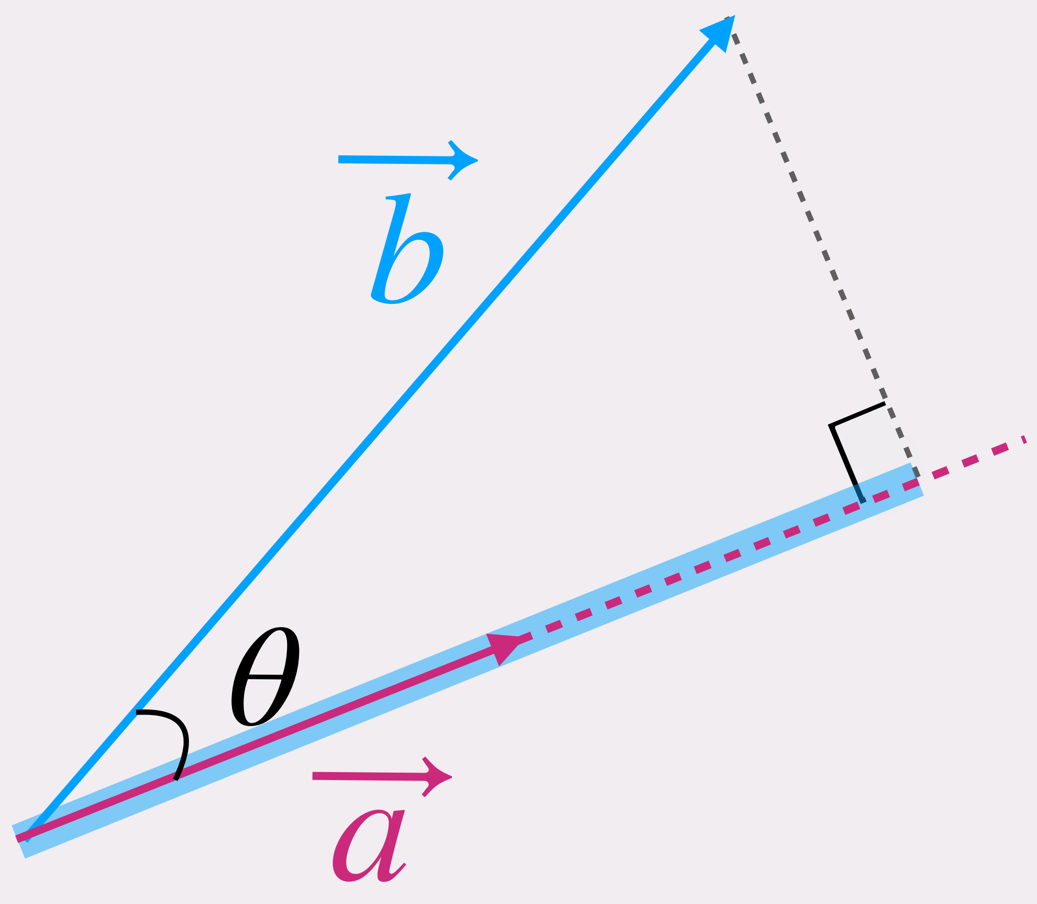
Il prodotto scalare in $\mathbb{R}$

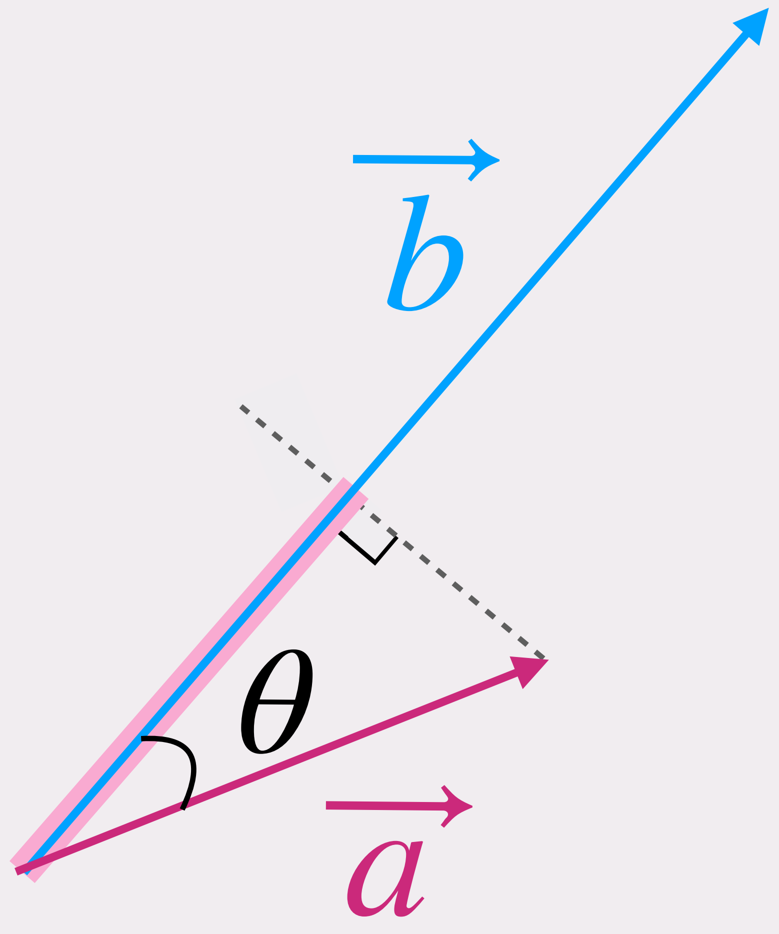
Il PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}$: DEFINIZIONE

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = c$$

vettori → scalare $\in \mathbb{R}$



$$ab_{\perp} = ab\cos(\theta)$$



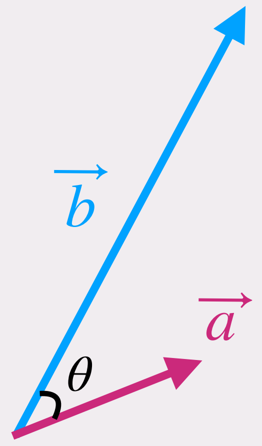
$$ba_{\perp} = ba\cos(\theta)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$a, b \geq 0$$

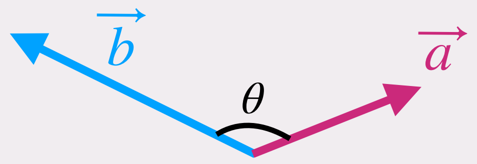
Il **segno** del prodotto scalare dipende dal **segno** del coseno:

- Angolo acuto: $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$



$\longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

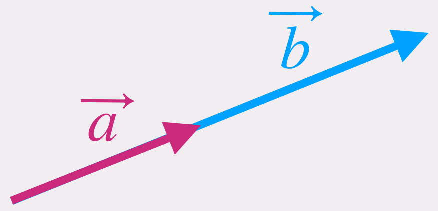
- Angolo ottuso: $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$



$\longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

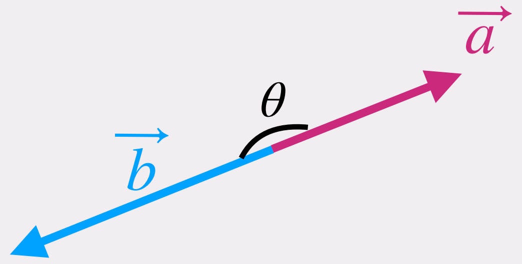
Casi particolari:

- $\theta = 0$



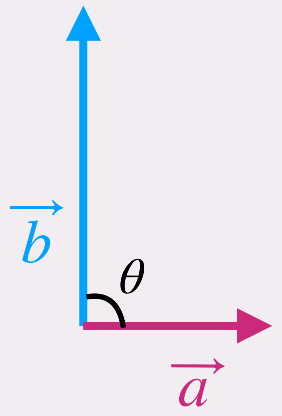
$\longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$

- $\theta = \pi$



$\longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$

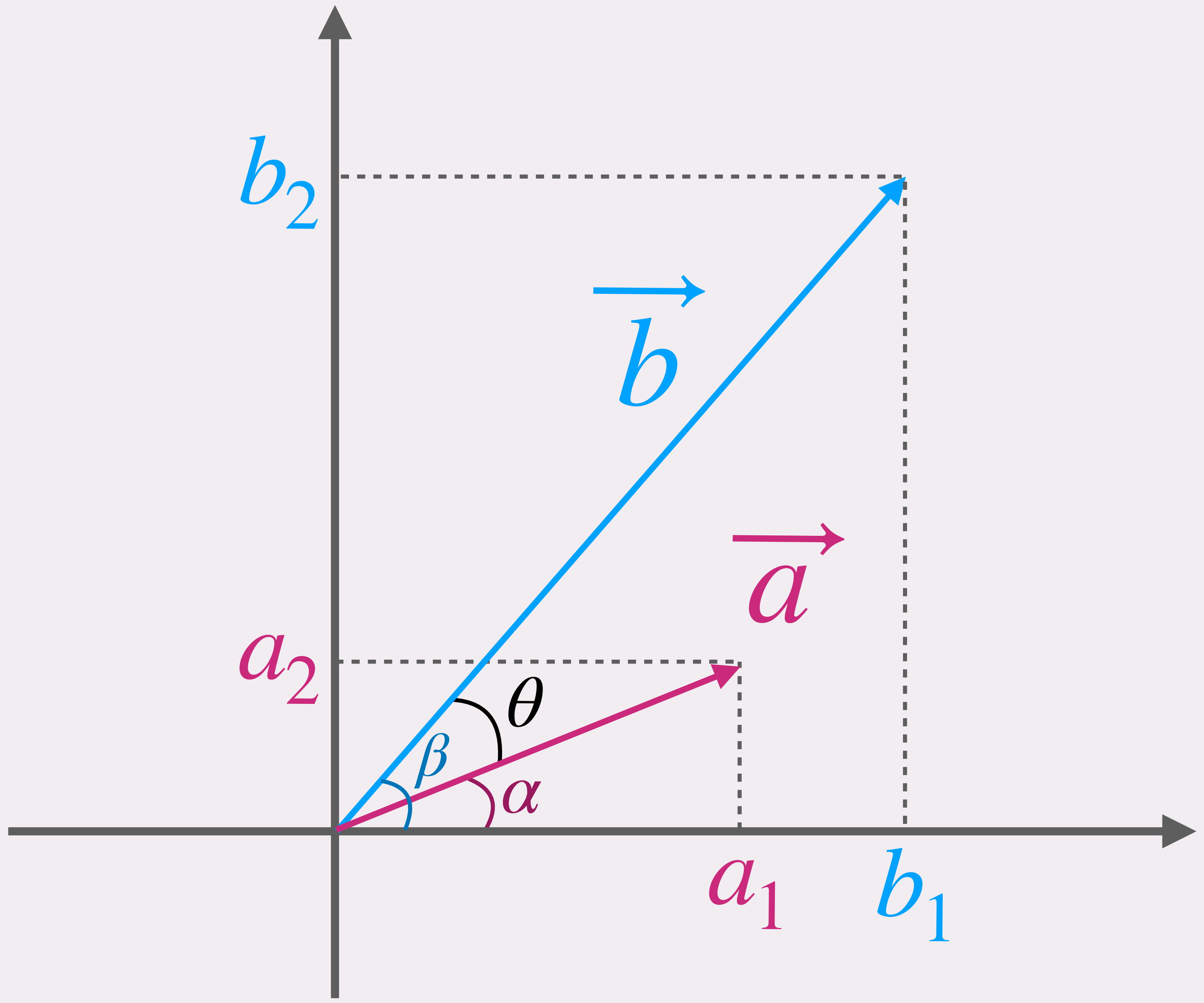
- $\theta = \dfrac{\pi}{2}$



$\longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Il segno del prodotto scalare è legato al modo in cui sono **disposti** rispettivamente i due vettori

Dall' **angolo** alle **coordinate:**



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\theta) =$$
$$= ab\cos(\beta - \alpha) =$$
$$= ab\left[\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\right] =$$
$$= \underbrace{a\cos(\alpha)}_{a_1}\ \underbrace{b\cos(\beta)}_{b_1} + \underbrace{a\sin(\alpha)}_{a_2}\ \underbrace{b\sin(\beta)}_{b_2} =$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2$$

Il PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{R}$: DEFINIZIONE

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\theta)$$

Il prodotto scalare in **2D**: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

Il prodotto scalare in **3D**: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Il prodotto scalare in **nD**:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Esempi: vettori in 4D

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 2 = 18 + 0 + 0 - 4 = 14$

2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -6 + 4 - 10 + 3 = -9$

3. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (-6) \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = -6 + 6 = 0$

L'angolo tra due vettori in 4D

Tramite il prodotto scalare abbiamo un metodo per **definire l'angolo** in dimensioni elevate:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\theta)$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$

$$\longrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4}{ab}$$

Guardiamo i risultati ottenuti:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \longrightarrow$ i due vettori formano un angolo acuto

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \\ = \sqrt{36 + 16 + 4} = 2\sqrt{14}$$

$$b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 6^2 + 2^2} = \\ = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$$

$$\longrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}\right) = \\ = \arccos\left(\frac{14}{14\sqrt{14}}\right) = \\ = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx \frac{5}{12}\pi$$

② $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \longrightarrow$ i due vettori formano un angolo ottuso

$$a = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2 + 1^2} = 6$$

$$b = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{33}$$

$$\longrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-9}{6\sqrt{33}}\right) = $$

$$= \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{33}}\right) \approx \frac{7}{12}\pi$$

③ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \longrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\arccos\left(\frac{0}{ab}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

Anche se non so rappresentare i due vettori, facendone il prodotto scalare posso sapere se sono o non sono ortogonali!

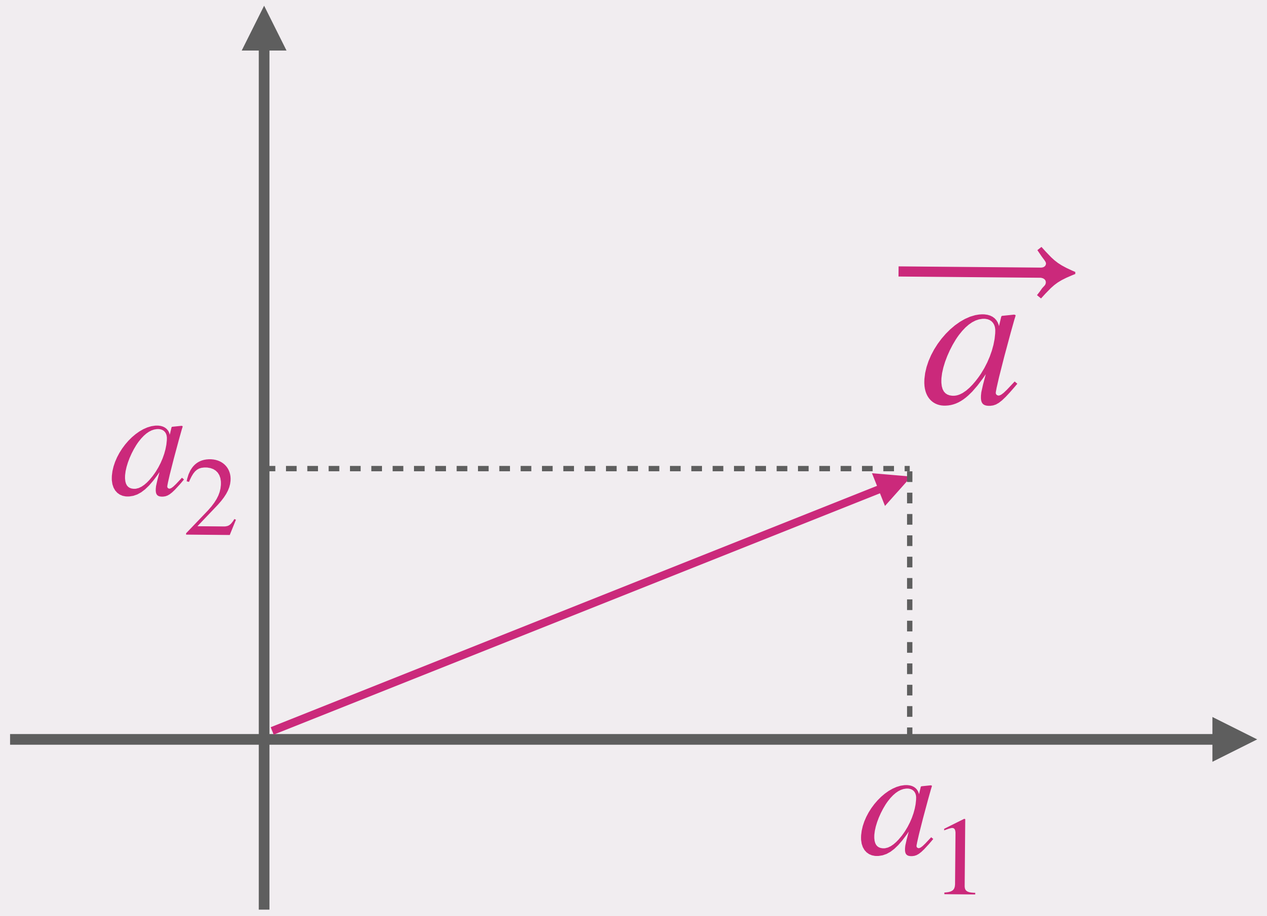
PROVA TU!

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ ⟶ i due vettori formano un angolo ottuso

2. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ⟶ i due vettori sono ortogonali

La LUNGHEZZA di un vettore

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$



$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \longrightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0}$$

Le proprietà del prodotto scalare in $\mathbb{R}$

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \longrightarrow$ $= 0$ solo se $\vec{a}$ è il vettore nullo

3. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4. $\alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \left(\alpha \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \alpha\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

$$\vec{a} \cdot \left(\beta \vec{b}\right) = \beta\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

Il prodotto scalare in $\mathbb{C}$

Il PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{C}$

$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ tali che: $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = ??$$

Posso usare la stessa definizione usata in $\mathbb{R}$**?**

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1 w_1 + z_2 w_2$$

→ Proviama a calcolare la **lunghezza** di $\vec{z}$

→ $|\vec{z}| \geq 0 \in \mathbb{R}$ → $|\vec{z}| = \sqrt{\vec{z} \cdot \vec{z}}$

Calcolo della lunghezza

1 $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|\vec{z}| = \sqrt{\vec{z} \cdot \vec{z}} = \sqrt{z_1 z_1 + z_2 z_2}$$
$$= \sqrt{2i \cdot 2i + 1 \cdot 1} = \sqrt{-4 + 1} = \sqrt{-3} = 3i$$

Numero immaginario puro

2 $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 - 3i \end{pmatrix}$

$$|\vec{z}| = \sqrt{(2+i) \cdot (2+i) + (1-3i) \cdot (1-3i)} = \sqrt{-5 + -2i}$$

Numero complesso

Non va bene!

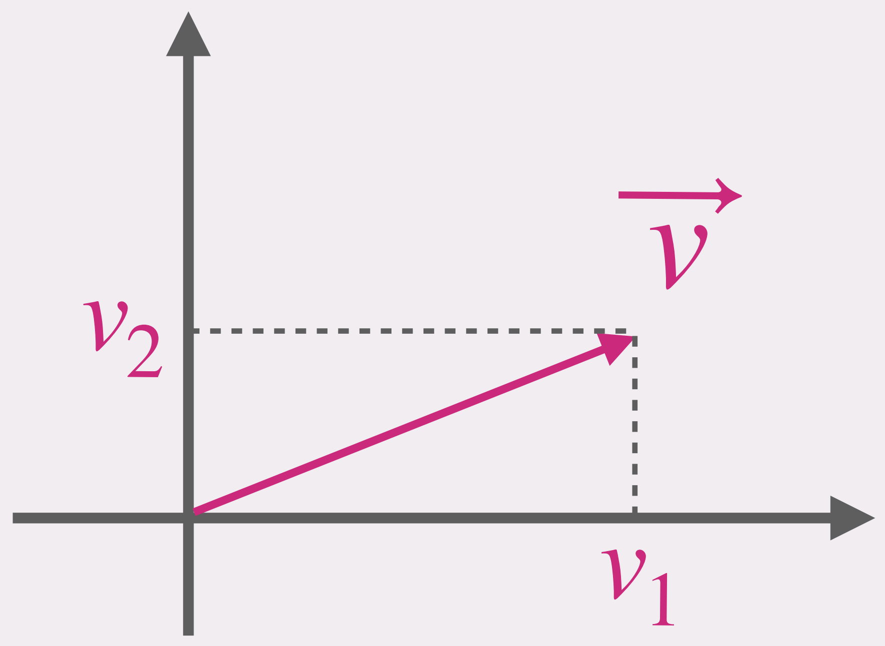
NUOVA DEFINIZIONE

$\mathbb{R}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \,,\, v_2 \;\in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^2$



$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

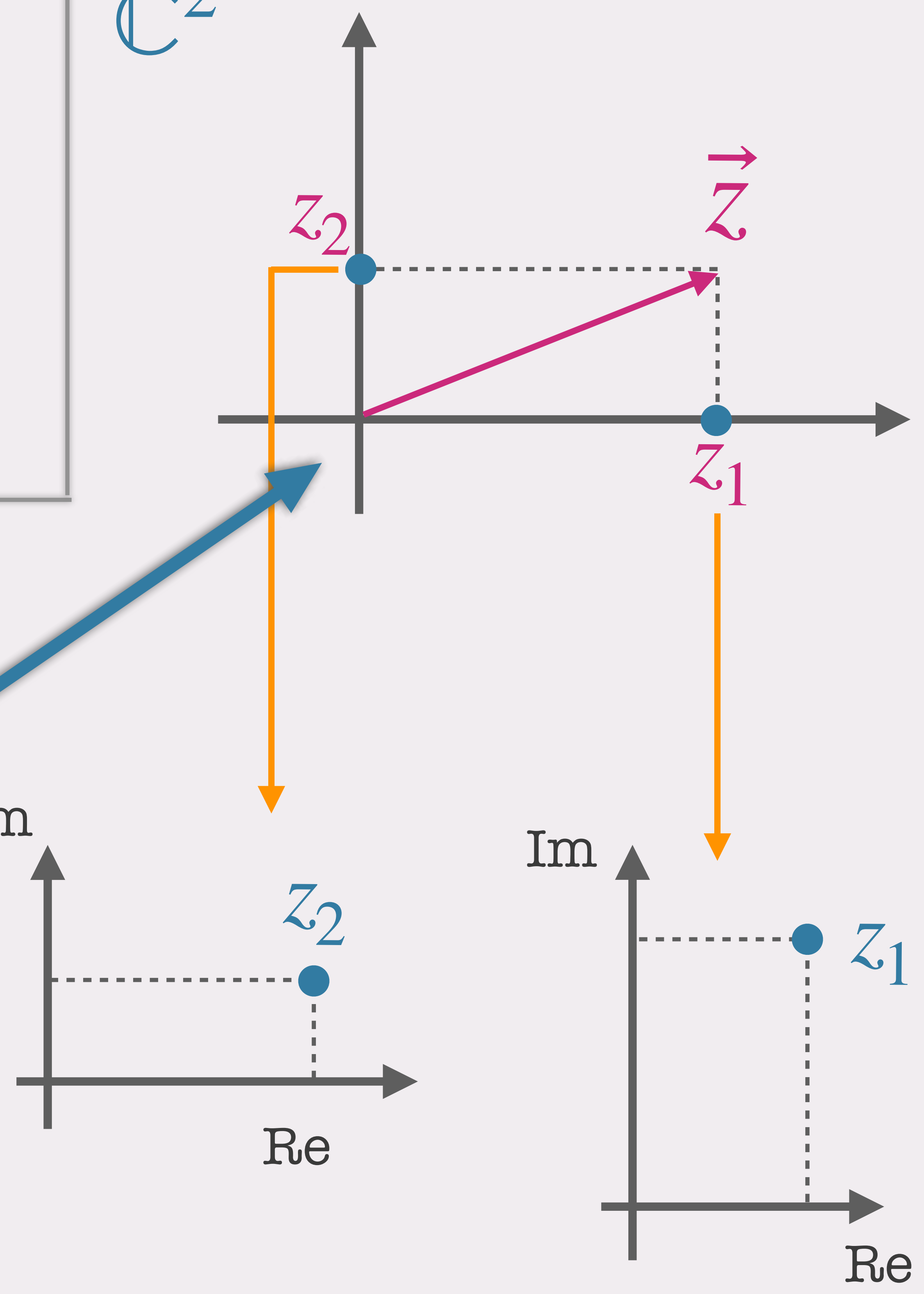
$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

$\mathbb{C}$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$z_1 \,,\, z_2 \;\in \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}^2$



Rappresentazione **SBAGLIATA** **di** $\mathbb{C}^2$

$$|\vec{z}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$$

$$|z_1|^2 = z_1^* z_1$$

$$|z_2|^2 = z_2^* z_2$$

$$|\vec{z}| = \sqrt{\vec{z} \cdot \vec{z}}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{z} = z_1^* z_1 + z_2^* z_2$$

Calcolo della **lunghezza** con la nuova definizione

1. $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|\vec{z}| = \sqrt{\vec{z} \cdot \vec{z}} = \sqrt{z_1^* \; z_1 + z_2^* \; z_2}$$

$$= \sqrt{(-2i) \cdot 2i + 1 \cdot 1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\big\downarrow$$

Numero reale positivo

2. $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix}$

$$|\vec{z}| = \sqrt{(2-i) \cdot (2+i) + (1+3i) \cdot (1-3i)} =$$

$$= \sqrt{4 - 2i + 2i + 1 + 1 - 3i + 3i + 9} = \sqrt{5+10} = \sqrt{15}$$

$$\big\downarrow$$

Numero reale positivo

Va bene! ✔

Il PRODOTTO SCALARE in $\mathbb{C}$: DEFINIZIONE

Dati due vettori $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ tali che $z_i \, , \, w_i \in \mathbb{C}$

allora: $\boxed{\vec{z} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} z_i^* w_i}$

Il prodotto scalare in **2D**: $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1^* w_1 + z_2^* w_2$

Il prodotto scalare in **3D**: $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1^* w_1 + z_2^* w_2 + z_3^* w_3$

- **Esempio:**

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 + i \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 + 2i \\ -5i \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1^* w_1 + z_2^* w_2 = (1 + i)(3 + 2i) + (2 - i)(-5i) =$$

$$= 3 + 2i + 3i - 2 - 10i - 5 = \underbrace{-4 \;\; -5i}_{c_1}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{z} = w_1^* z_1 + w_2^* z_2 = (3 - 2i)(1 - i) + (5i)(2 + i) =$$

$$= 3 - 3i - 2i - 2 + 10i - 5i = \underbrace{-4 \;\; +5i}_{c_2}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{w} \neq \vec{w} \cdot \vec{z}$$

$$c_2 = c_1^* \longrightarrow \vec{z} \cdot \vec{w} = \left(\vec{w} \cdot \vec{z}\right)^*$$

Le proprietà del prodotto scalare in $\mathbb{C}$

1. $$\vec{z} \cdot \vec{w} = \left(\vec{w} \cdot \vec{z}\right)^*$$

2. $$\vec{z} \cdot \vec{z} \geq 0 \longrightarrow$$ $= 0$ solo se $\vec{z}$ è il vettore nullo

3. $$\vec{z} \cdot \left(\vec{w} + \vec{k}\right) = \vec{z} \cdot \vec{w} + \vec{z} \cdot \vec{k}$$

4. $\gamma \, , \, \delta \in \mathbb{C}$

Antilinearità della prima componete

$$\left(\gamma \vec{z}\right) \cdot \vec{w} = \gamma^* \left(\vec{z} \cdot \vec{w}\right)$$

Linearità della seconda componete

$$\vec{z} \cdot \left(\delta \vec{w}\right) = \delta \left(\vec{z} \cdot \vec{w}\right)$$

Esempio:

Posso sapere come sono orientati i due vettori? **NO**

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 - i \\ 2 + 3i \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -3 - 5i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{z} \cdot \vec{w} &= z_1^* w_1 + z_2^* w_2 = \\ &= (4 + i)(1 + 2i) + (2 - 3i)(-3 - 5i) = \\ &= 4 + 8i + i - 2 - 6 - 10i + 9i - 15 = \ 19 \ + 8i \end{aligned}$$

I numeri complessi non hanno un segno

$$\longrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{z} \cdot \vec{w}}{|\vec{z}||\vec{w}|} \right)$$

Posso sapere se i due vettori sono ortogonali? **SI**

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} -6 - i \\ 6 + i \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 + i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{z} \cdot \vec{w} &= z_1^* w_1 + z_2^* w_2 = \\ &= (-6 + i)(1 + i) + (6 - i)(1 + i) = \\ &= -6 - 6i + i - 1 + 6 + 6i - i + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{z} \cdot \vec{w} = 0 \longrightarrow \vec{z} \perp \vec{w}$$

Il prodotto scalare è uno strumento **straordinario**!

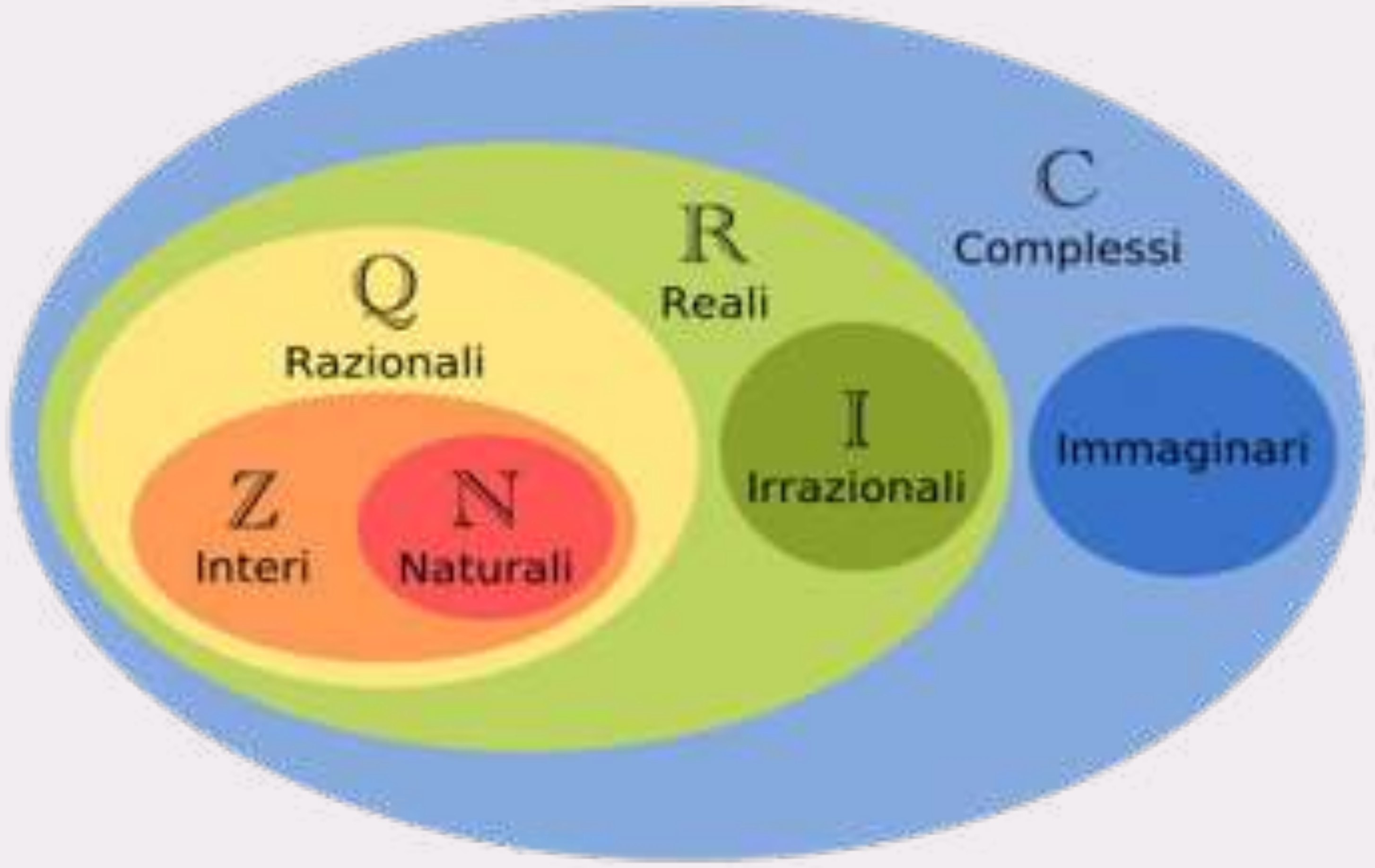
CONFRONTO il prodotto scalare in $\mathbb{R}$ e quello in $\mathbb{C}$

Dati due vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ tali che: $a_1 \, , \, b_1 \, , \, a_2 \, , \, b_2 \; \in \mathbb{R}$

calcoliamo il prodotto scalare:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Il prodotto scalare definito per i numeri complessi è la **generalizzazione** di quello definito per i numeri reali.



La NOTAZIONE di DIRAC

$$\vec{z} \cdot \vec{w} \longrightarrow \langle z | w \rangle$$

Braket

$$|w\rangle = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ket

$$\langle z| = \left(z_1^*,\ z_2^*,\ \dots,z_n^*\right)$$

bra

Le proprietà

1. $\langle z|w\rangle = \left(\langle w|z\rangle\right)^*$
2. $\langle z|z\rangle \geq 0$
3. $\langle z|w\rangle = 0 \longrightarrow |z\rangle \perp |w\rangle$
4. $\langle z|\left(|w\rangle + |k\rangle\right) = \langle z|w\rangle + \langle z|k\rangle$
5. $\gamma\ ,\ \delta \in \mathbb{C} \qquad \langle \gamma z|w\rangle = \gamma^* \langle z|w\rangle$

$$\langle z|\delta w\rangle = \delta \langle z|w\rangle$$