Il PRIMO POSTULATO della meccanica quantistica

I postulato

Ad ogni sistema fisico in meccanica quantistica viene associato uno **spazio di Hilbert**.
Le dimensioni di tale spazio dipendono dai possibili risultati della misura.
Lo **stato del sistema** è rappresentato da un **vettore unitario** in questo spazio.

- Lineare
- Complesso
- Dotato di prodotto scalare

Le componenti del vettore dipendo dalla **scelta degli assi**.

Gli assi dipendono dalle **domande che ci poniamo sul sistema**

- Lo **stato del sistema** è rappresentato da un **vettore lungo 1** perché il modulo quadro delle componenti rappresenta la **PROBAILITÀ** di ottenere il risultato corrispondente all'asse

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \boxed{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + .. = 1}$$

- Se chiamo $|e_i\rangle$ i stati base (anch'essi lunghi 1) che identificano gli assi corrispondenti alle diverse possibilità, allora posso scrivere lo stato in questo modo:

$$|\Psi\rangle = \psi_1 |e_1\rangle + \psi_2 |e_2\rangle + \psi_3 |e_3\rangle + ..$$

STATI BASE

$|\psi_i|^2 = \left|\langle e_i|\Psi\rangle\right|^2$ **: PROBAILITÀ**

Gli esperimenti a
SINGOLO QUANTO

Lo stato dell'elettrone dopo aver passato le fenditure: $|e^-\rangle$

Abbiamo studiato nel dettaglio l'esperimento parlando della probabilità, e abbiamo trovato due modi per definire lo stato del sistema che dipendo dalle **domande che ci siamo posti**:

- passa dalla fenditura 1
- passa dalla fenditura 2

- viene rivelato in A (zona d'interferenza distruttiva)
- viene rivelato in B (zona d'interferenza costruttiva)

DUE POSSIBILITÀ **INDIPENDENTI** $\longrightarrow$ **DUE** ASSI **ORTOGONALI**

Stati base : $|1\rangle$ e $|2\rangle$

$$|e^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)$$

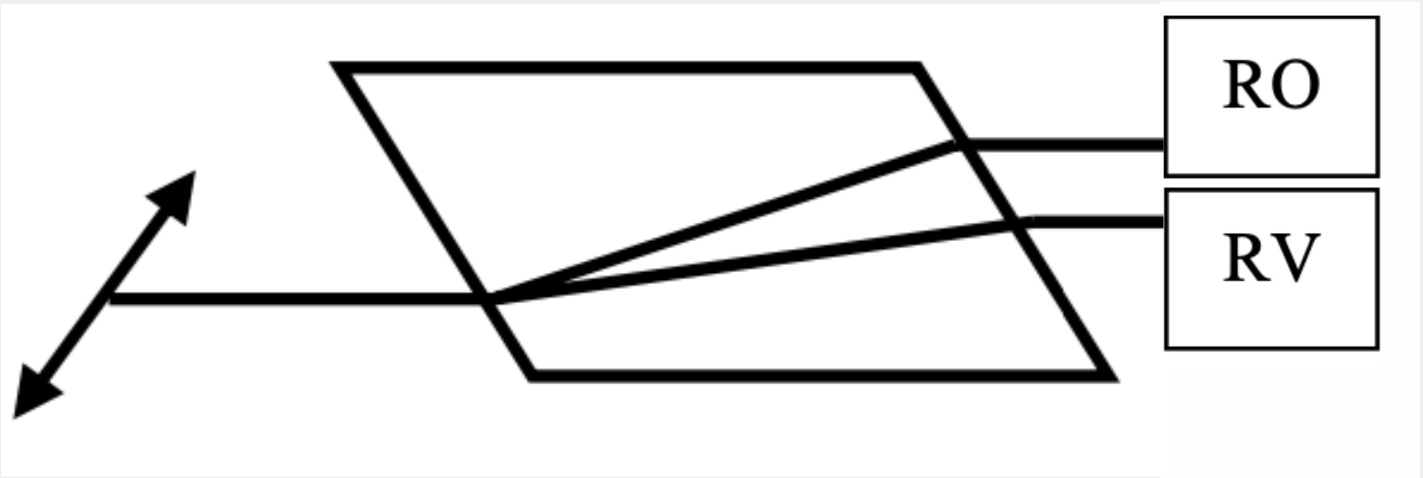
Stati base : $|A\rangle$ e $|B\rangle$

$$|e^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{1\to A} + c_{2\to A}\right)|A\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{1\to B} + c_{2\to B}\right)|B\rangle$$

Cambiando le domande, cambiano gli assi, cambiano gli stati base e cambia il modo di scrivere lo stato!

Lo stato del fotone dopo aver passato la calcite: $|\gamma\rangle$

- **DUE** POSSIBILITÀ **INDIPENDENTI** ⟶ **DUE** ASSI **ORTOGONALI**
  - Segue il percorso in alto: polarizzato orizzontalmente
  - Segue il percorso in basso: polarizzato verticalmente

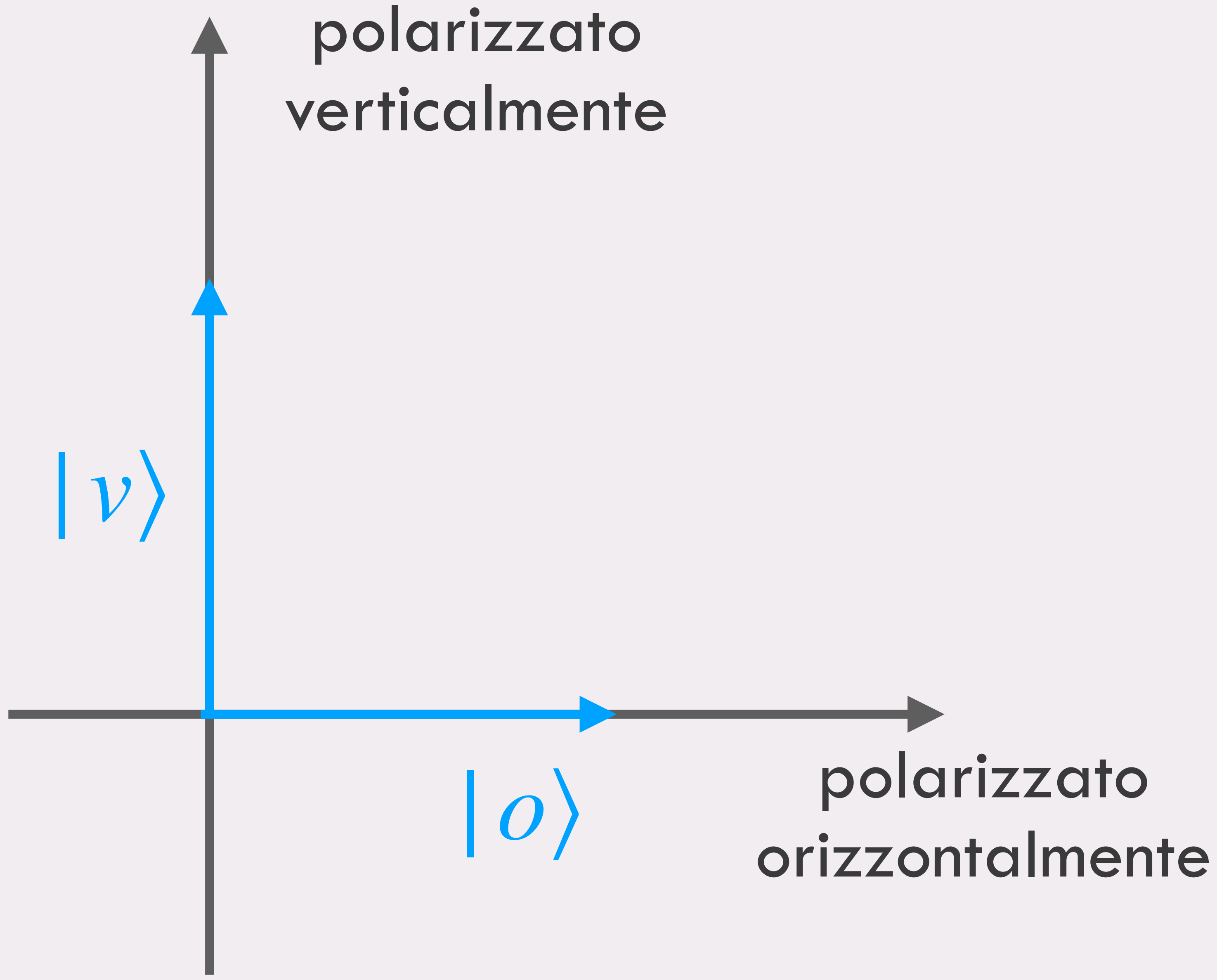


50%

50%

stati base: $\langle o|v\rangle = 0$

- $|o\rangle$ = stato in cui si trova il fotone **se misuro che ha preso il percorso in alto, quindi è polarizzato orizzontalmente**
- $|v\rangle$ = stato in cui si trova il fotone **se misuro che ha preso il percorso in basso, quindi è polarizzato verticalmente**



- $|\gamma\rangle$: **STATO** in cui si trova il fonte **dopo aver attraversato la calcite** (non misuro che percorso ha preso) $\longrightarrow$ **VETTORE UNITARIO con 2 componenti**

$$|\gamma\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$c_1 \longrightarrow |c_1|^2 = \left|\langle o|\gamma\rangle\right|^2 =$ probabilità che abbia polarizzazione orizzontale $= \dfrac{1}{2} \longrightarrow c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

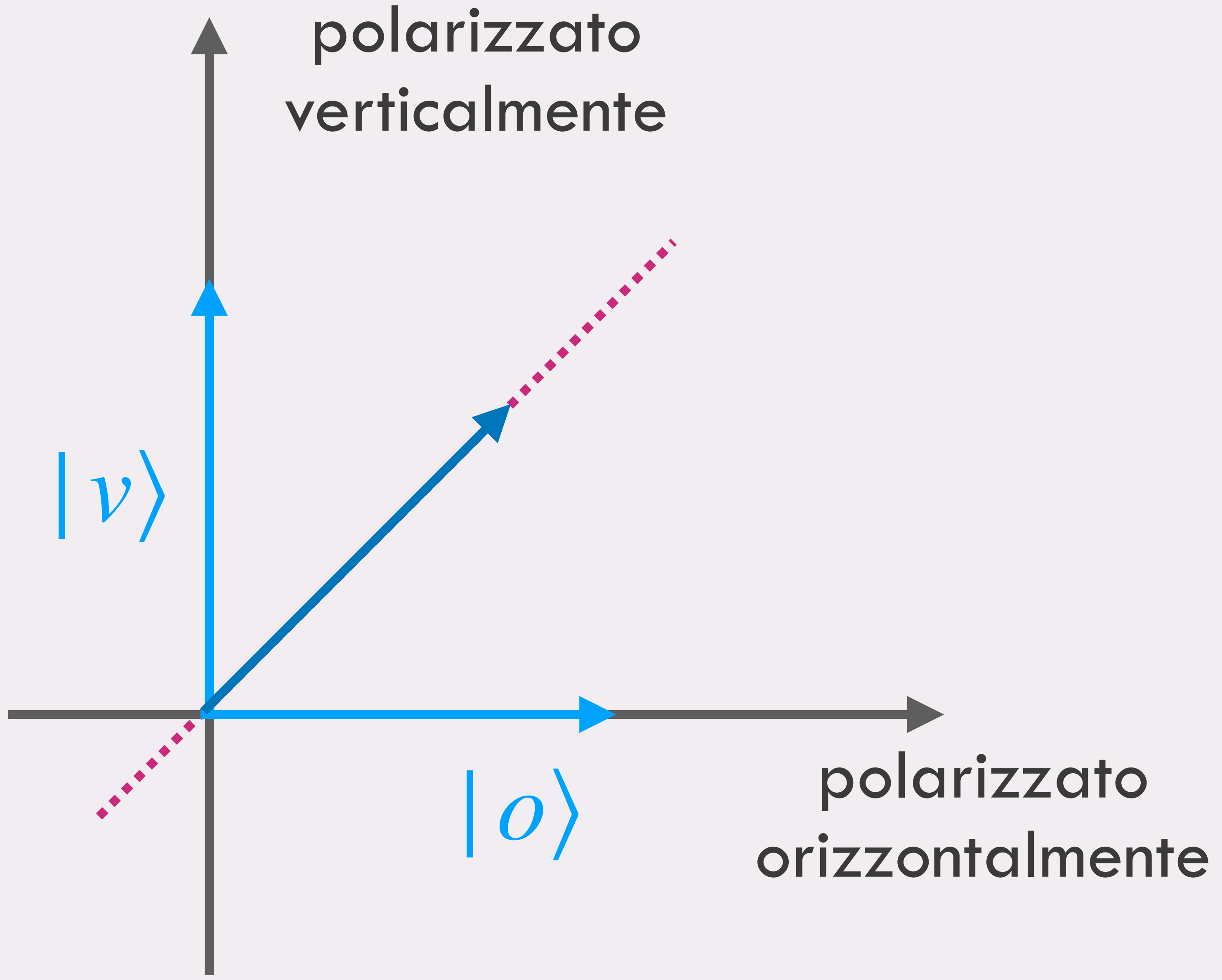
$c_2 \longrightarrow |c_2|^2 = \left|\langle v|\gamma\rangle\right|^2 =$ probabilità che abbia polarizzazione orizzontale $= \dfrac{1}{2} \longrightarrow c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Deve valere sempre:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

$$|\gamma\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$|\gamma\rangle = c_1\,|o\rangle + c_2\,|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|o\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|v\rangle$$

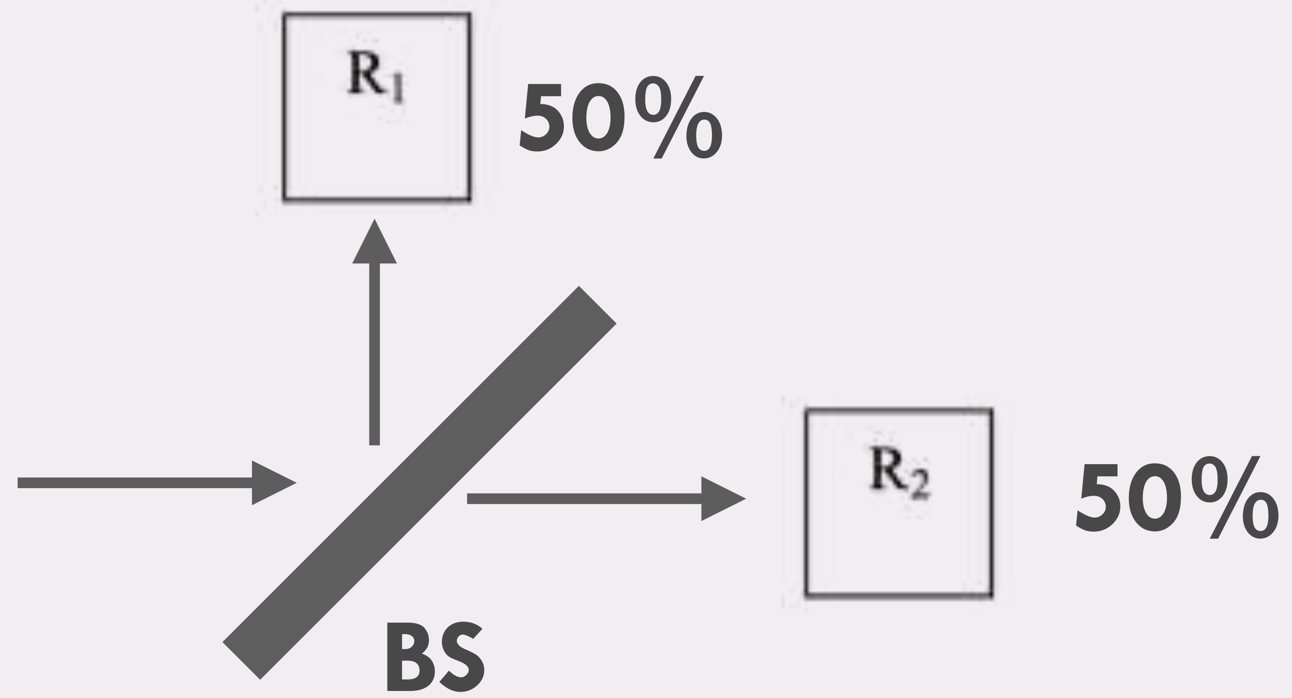


Lo stato del fotone dopo aver passato BS: $|\gamma\rangle$

- **DUE** POSSIBILITÀ **INDIPENDENTI** ⟶ **DUE** ASSI **ORTOGONALI**

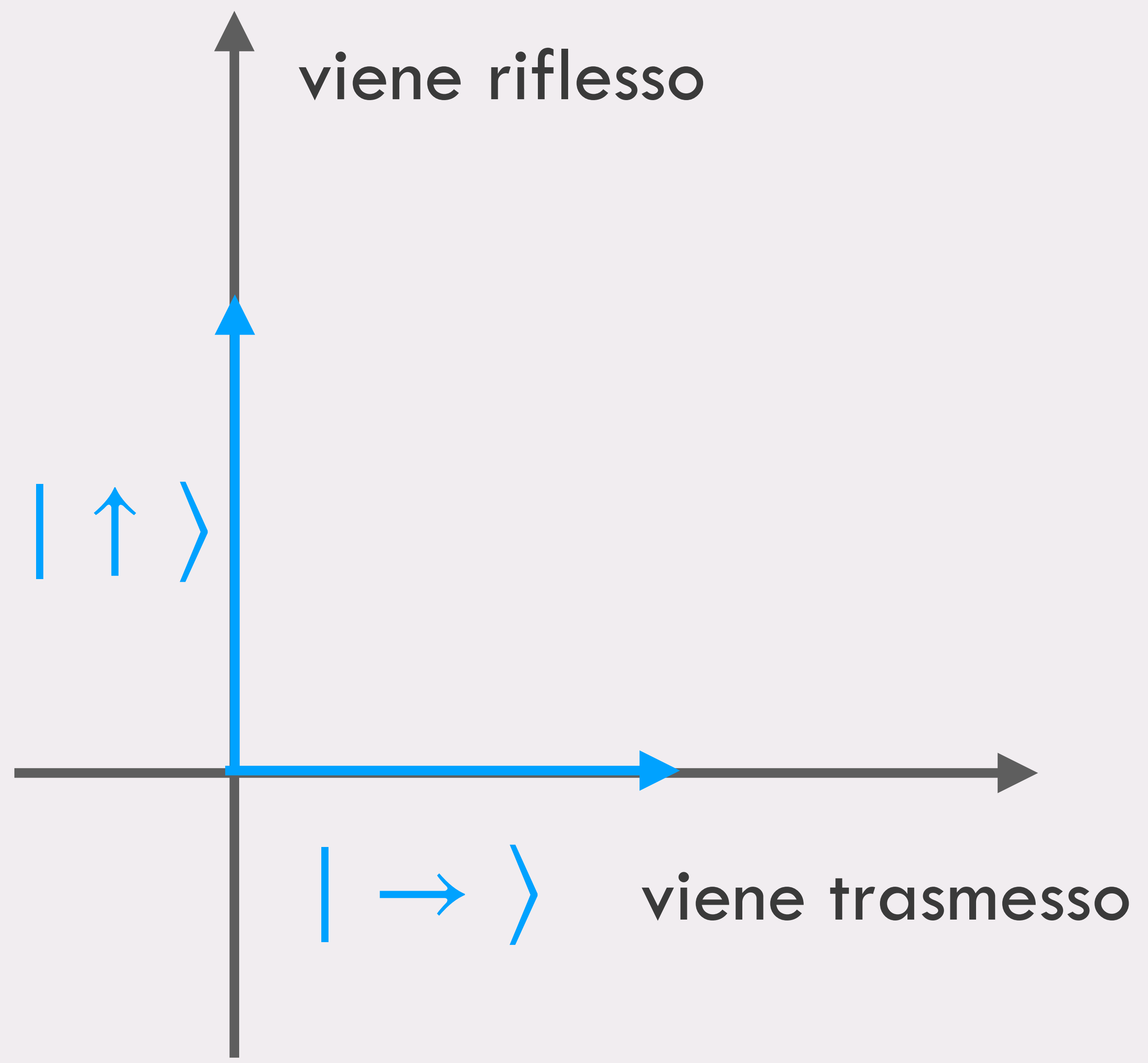
  - Viene trasmesso
  - Viene riflesso

  ⟶ Sperimentalmente sappiamo che sono eventi indipendenti



stati base: $\langle \rightarrow | \uparrow \rangle = 0$

- $| \rightarrow \rangle$ = stato in cui si trova il fotone **se misuro che è stato trasmesso**
- $| \uparrow \rangle$ = stato in cui si trova il fotone **se misuro che è stato riflesso**



- $|\gamma\rangle$: **STATO** in cui si trova il fonte **dopo aver attraversato il BS** (non misuro che percorso ha preso) $\longrightarrow$ **VETTORE UNITARIO con 2 componenti**

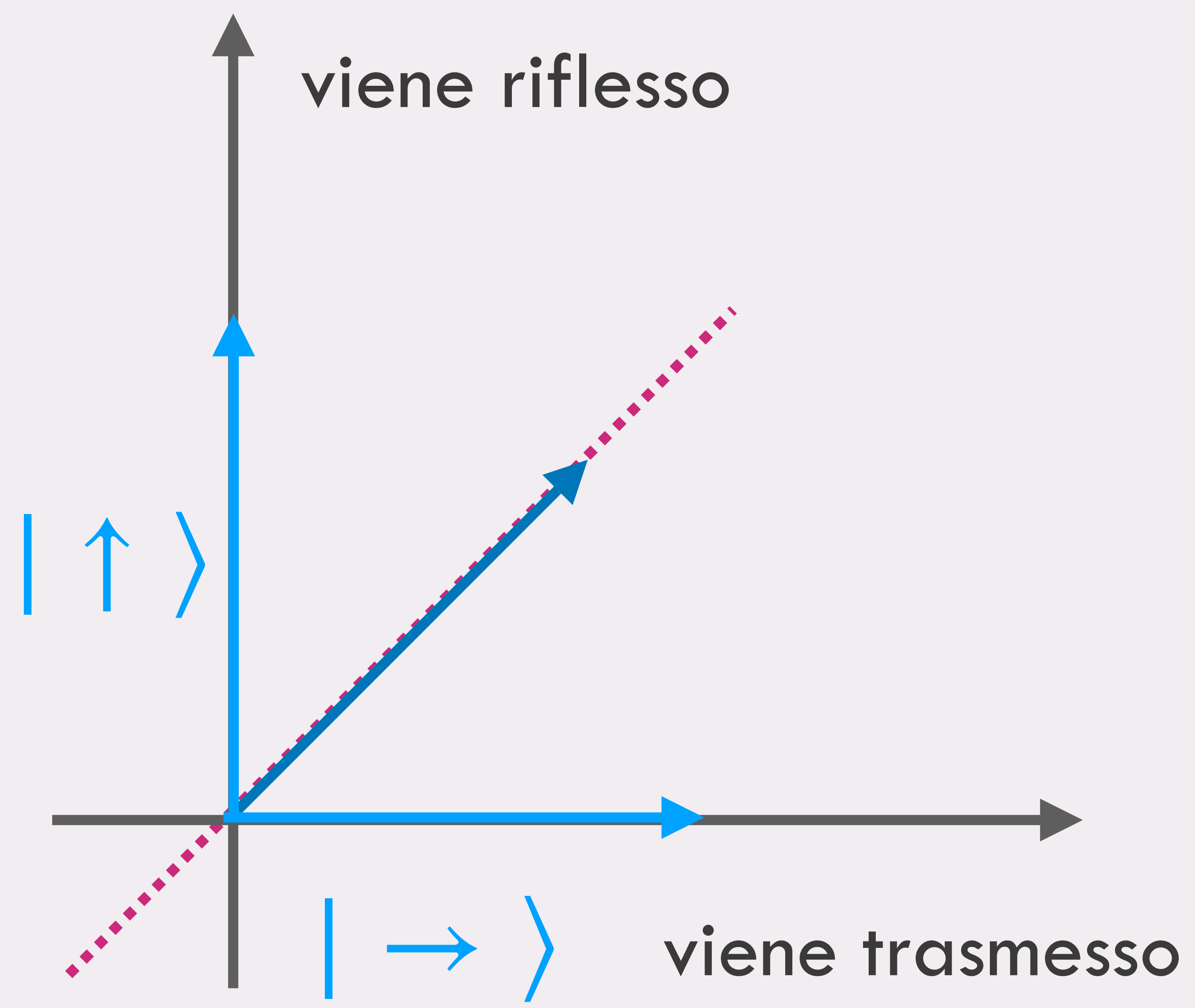
$$|\gamma\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$c_1 \longrightarrow |c_1|^2 = \left|\langle \rightarrow |\gamma\rangle\right|^2 =$ probabilità che venga trasmesso $= \frac{1}{2} \longrightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$c_2 \longrightarrow |c_2|^2 = \left|\langle \uparrow |\gamma\rangle\right|^2 =$ probabilità che venga riflesso $= \frac{1}{2} \longrightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Deve valere sempre:
$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

$$|\gamma\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



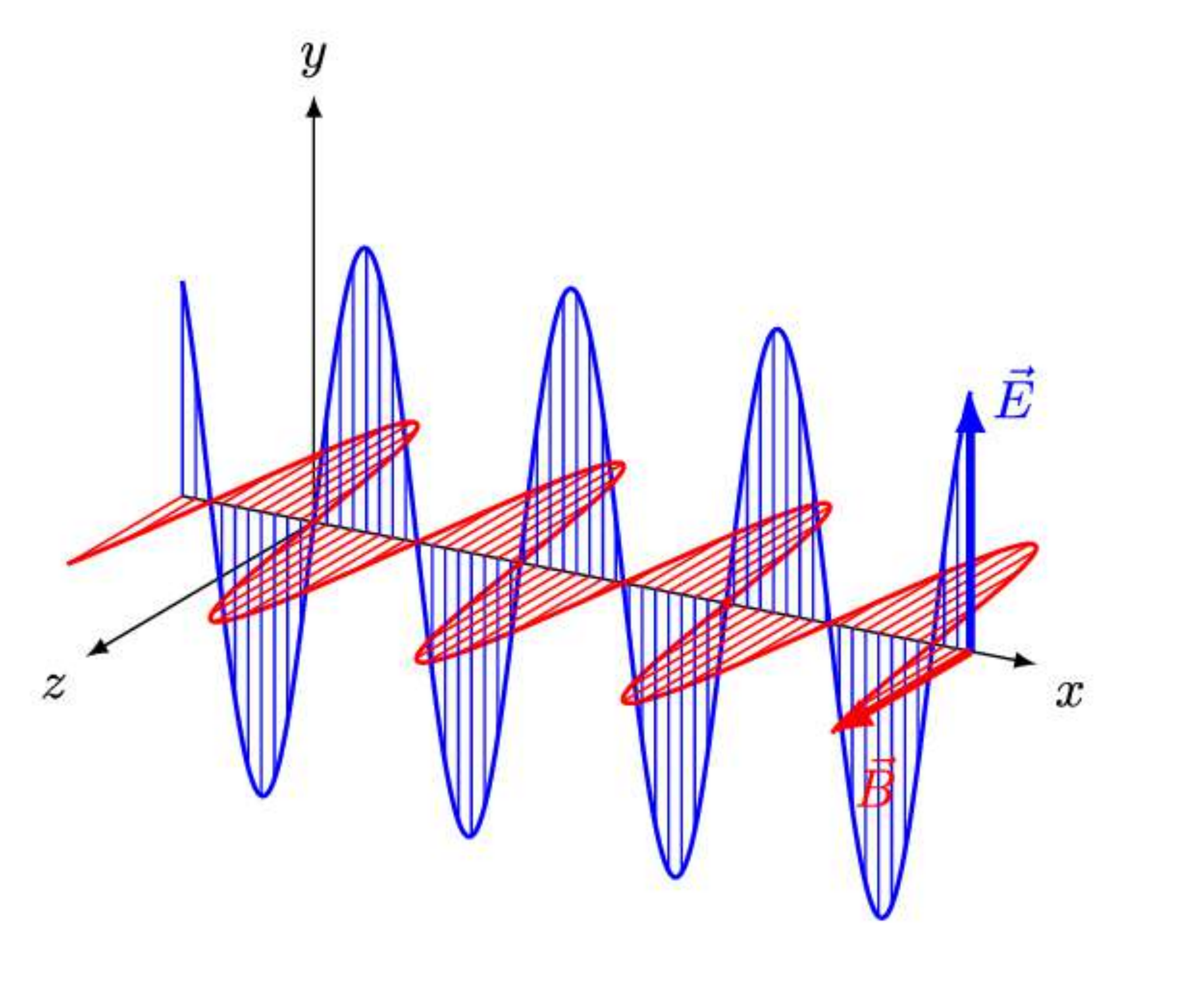
$$|\gamma\rangle = c_1 |\rightarrow\rangle + c_2 |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\rightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle$$

La polarizzazione

$|\theta >$

POLARIZZAZIONE

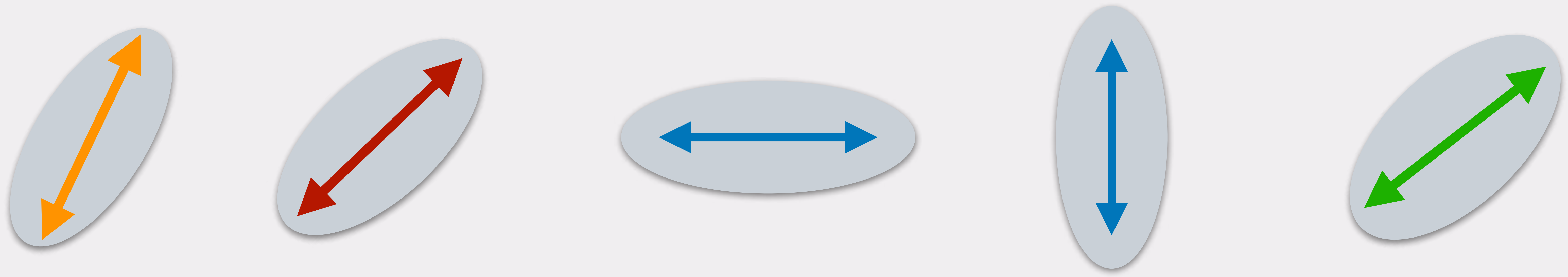
direzione di oscillazione del campo elettrico



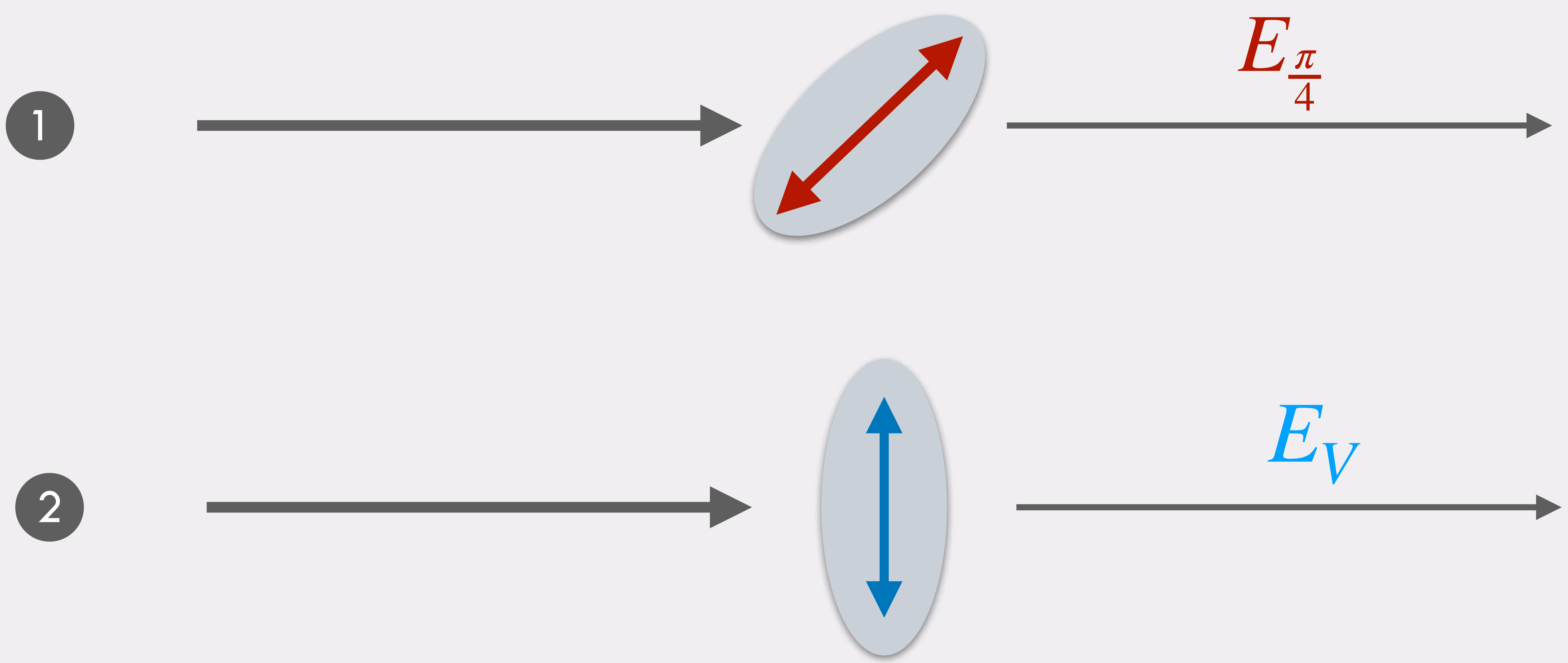
- Se il campo elettrico **oscilla orizzontalmente** → Luce **polarizzata orizzontalmente**
- Se il campo elettrico **oscilla verticalmente** → Luce **polarizzata verticalmente**
- Luce **polarizzata a** $\frac{\pi}{4}$ — Luce **polarizzata a** $\frac{\pi}{3}$ — Luce **polarizzata a** $\frac{\pi}{6}$

Come faccio a polarizzare la luce?

Facendola incidere su un polarizzatore: la luce trasmessa avrà quella polarizzazione



$E_{\frac{\pi}{3}}$ $E_{\frac{\pi}{4}}$ E_O E_V $E_{\frac{\pi}{6}}$



Legge di **MALUS**

Il polarizzatore assorbe parte della luce incidente. Qual è l'intensità della luce trasmessa?

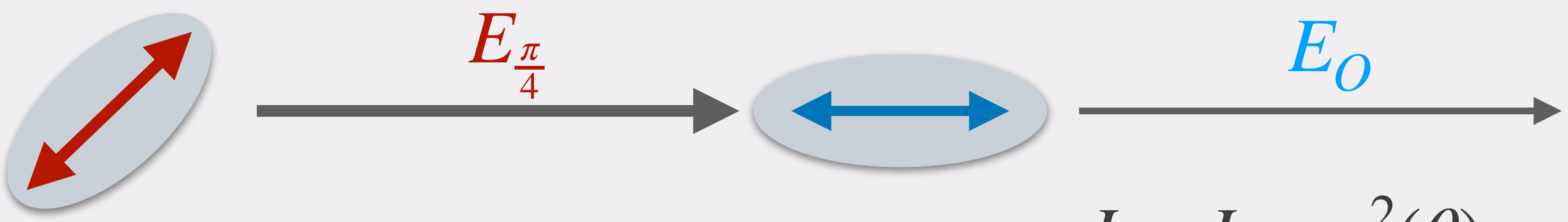
$$I = I_0 \cos^2(\theta)$$

Intensità trasmessa (I)

Intensità incidente (I_0)

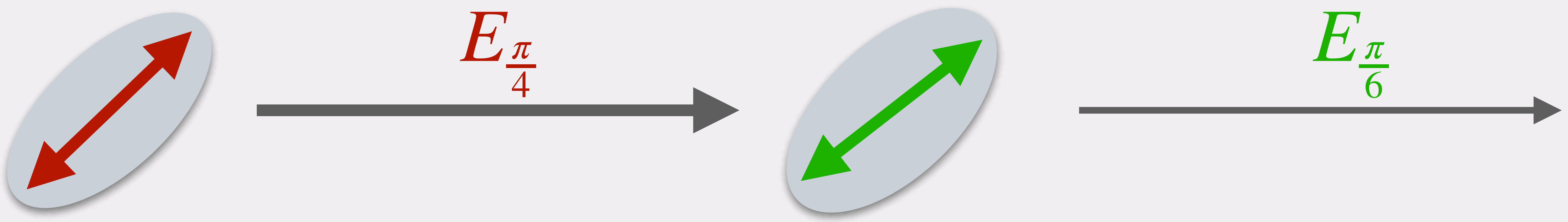
Angolo tra le due direzioni di polarizzazione (θ)

1



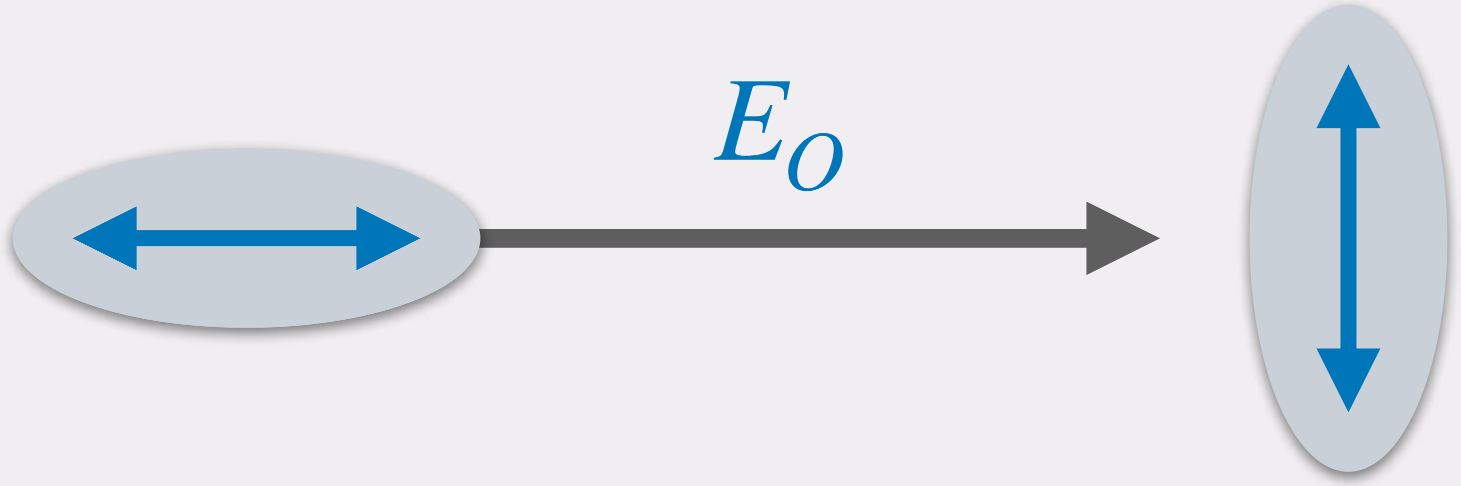
$$I = I_0 \cos^2(\theta) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} I_0$$

2



$$I = I_0 \cos^2(\theta) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

3



$$I = I_0 \cos^2(\theta) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

I FOTONI

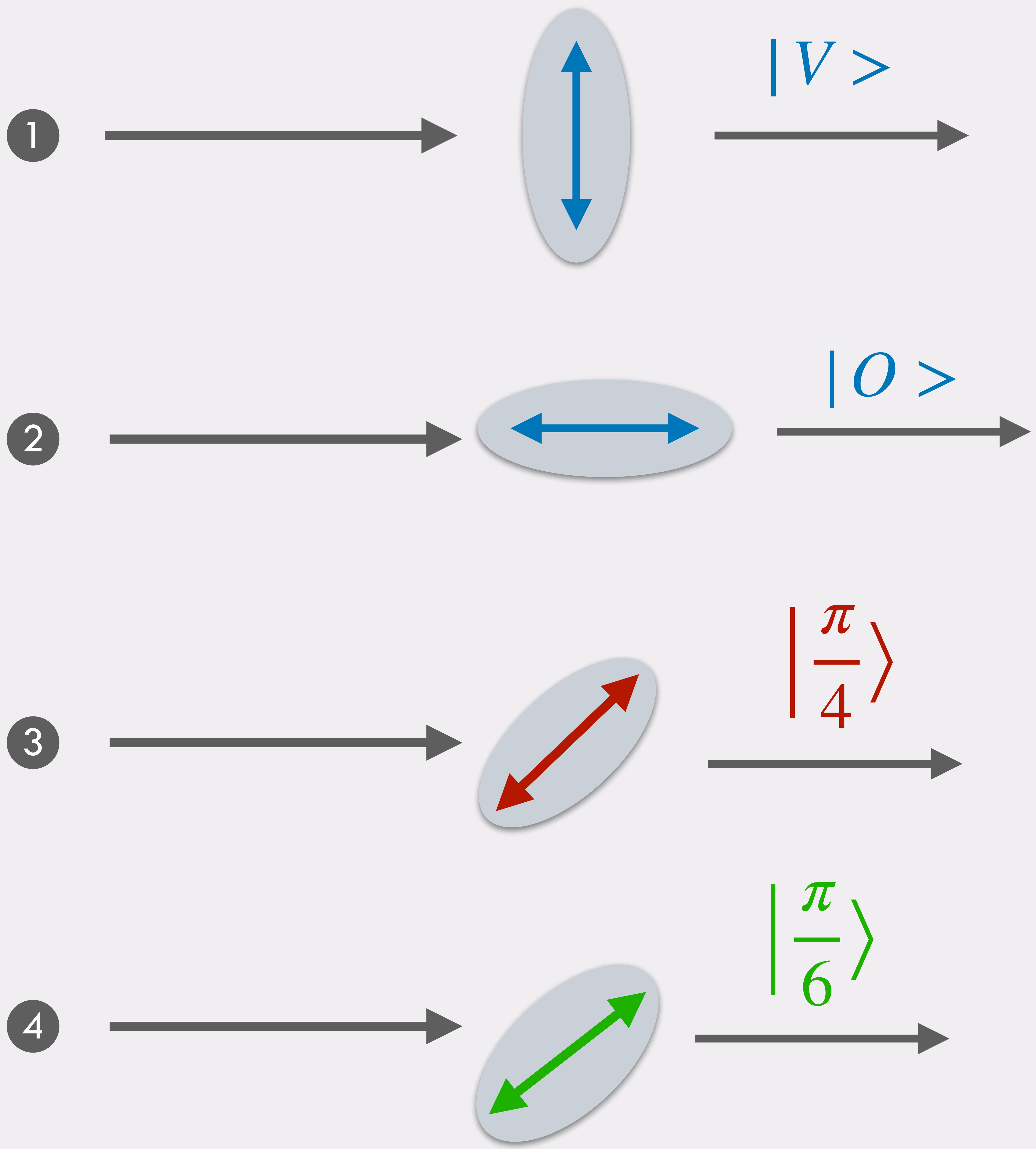
Cosa succede se invece della luce ad alta intensità, facciamo incidere sul polarizzatore singoli fotoni?

↓

Poiché il fotone è indivisibile, il polarizzatore può assorbirlo oppure lasciarlo passare:

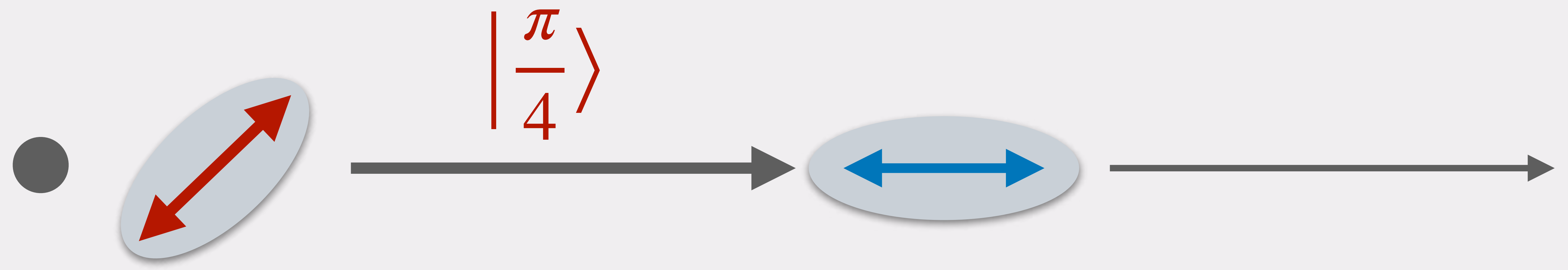
↓

il fotone che passa avrà la stessa polarizzazione del filtro



I FOTONI

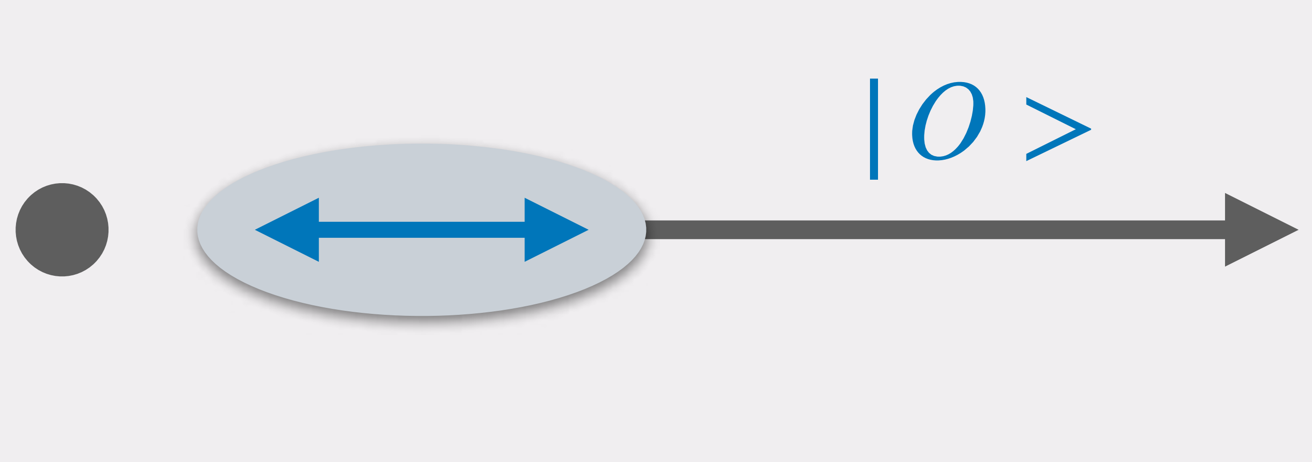
I fotoni, incedendo su un polarizzazione avranno quindi una certa probabilità di essere assorbiti e di essere lasciati passare:



Angolo tra le due direzioni di polarizzazione

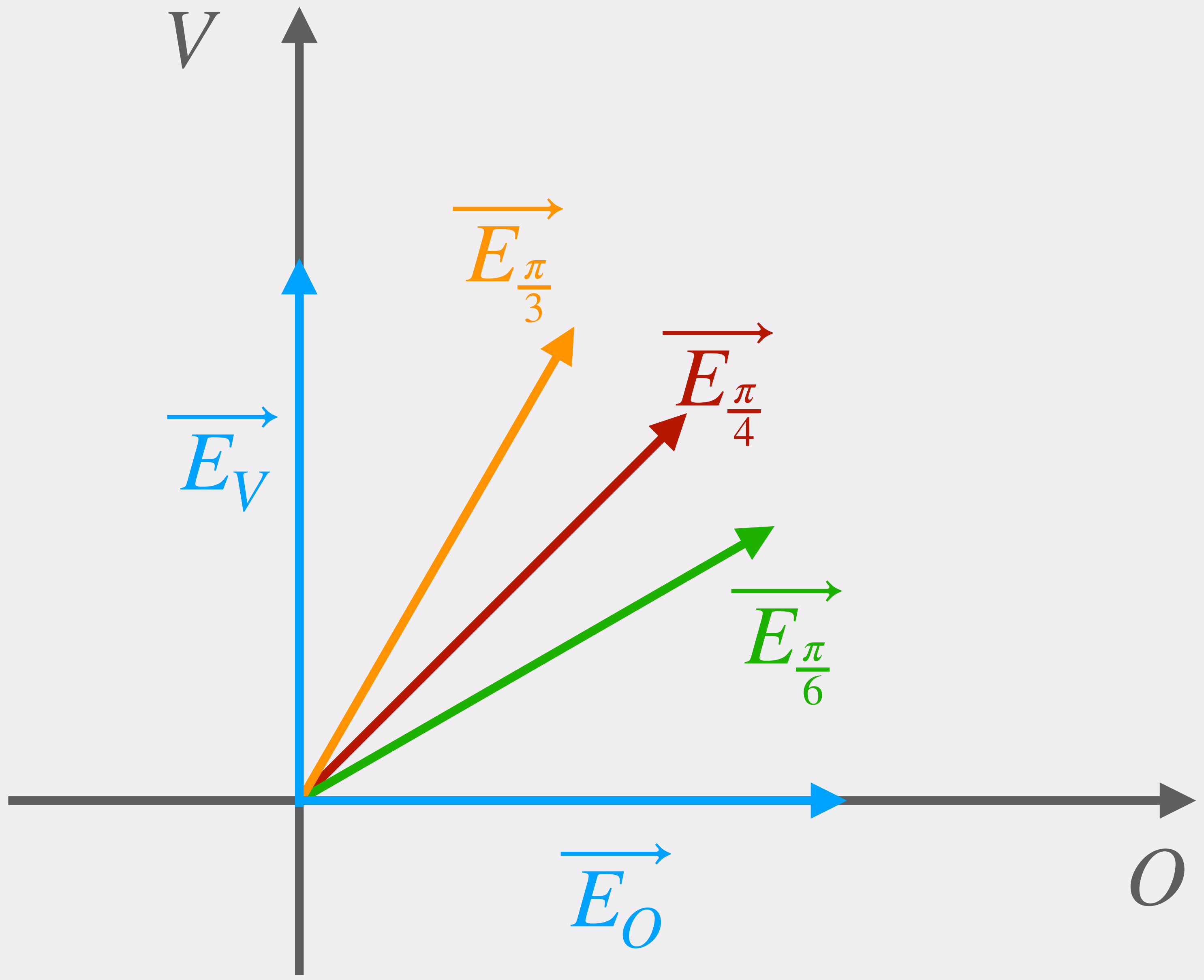
$$N \propto I_0 \qquad n \propto I \longrightarrow \frac{n}{N} = \frac{I}{I_0} = \boxed{P = \cos^2(\theta)}$$

PROBABILITÀ di passare il secondo filtro $\longrightarrow P = cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$



$$P = \cos^2(\theta) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

SPAZIO REALE



$$\boxed{\overrightarrow{E_\theta} = c_o\overrightarrow{E_O} + c_v\overrightarrow{E_V}}$$

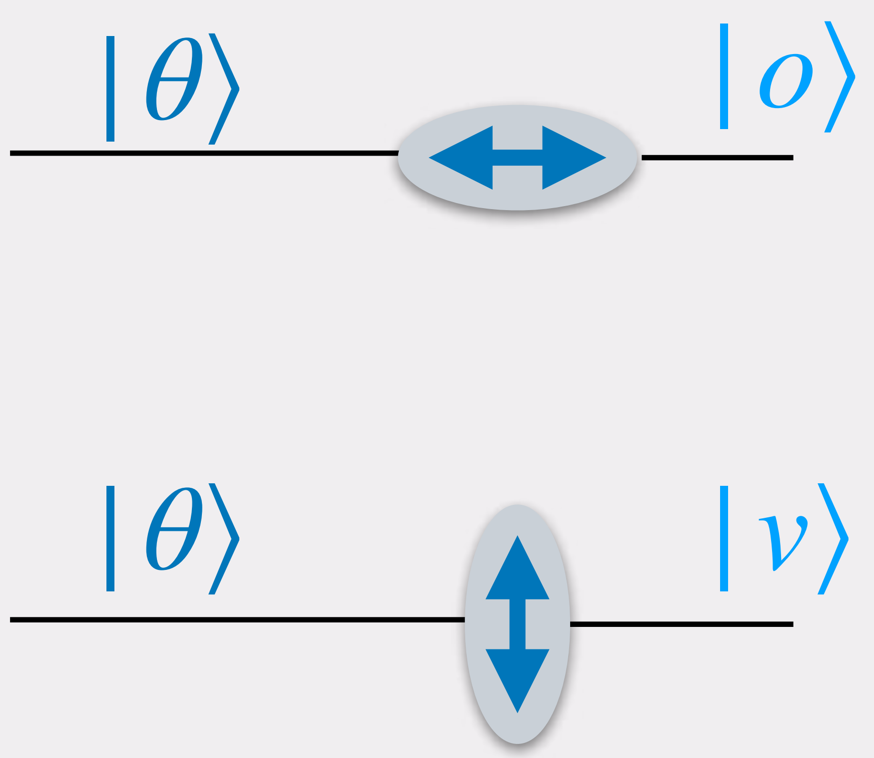
- $c_o = < E_O | E_\theta > = \cos(\theta)$
- $c_v = < E_V | E_\theta > = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$

- $\overrightarrow{E_{\frac{\pi}{6}}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{E_O} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{E_V} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{E_O} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E_V}$
- $\overrightarrow{E_{\frac{\pi}{3}}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\overrightarrow{E_O} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\overrightarrow{E_V} = \frac{1}{2}\overrightarrow{E_O} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{E_V}$
- $\overrightarrow{E_{\frac{\pi}{4}}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{E_O} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{E_V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{E_O} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{E_V}$

SPAZIO di HILBERT

Come rappresento nello spazio di Hilbert lo stato di un fotone con una certa polarizzazione θ?

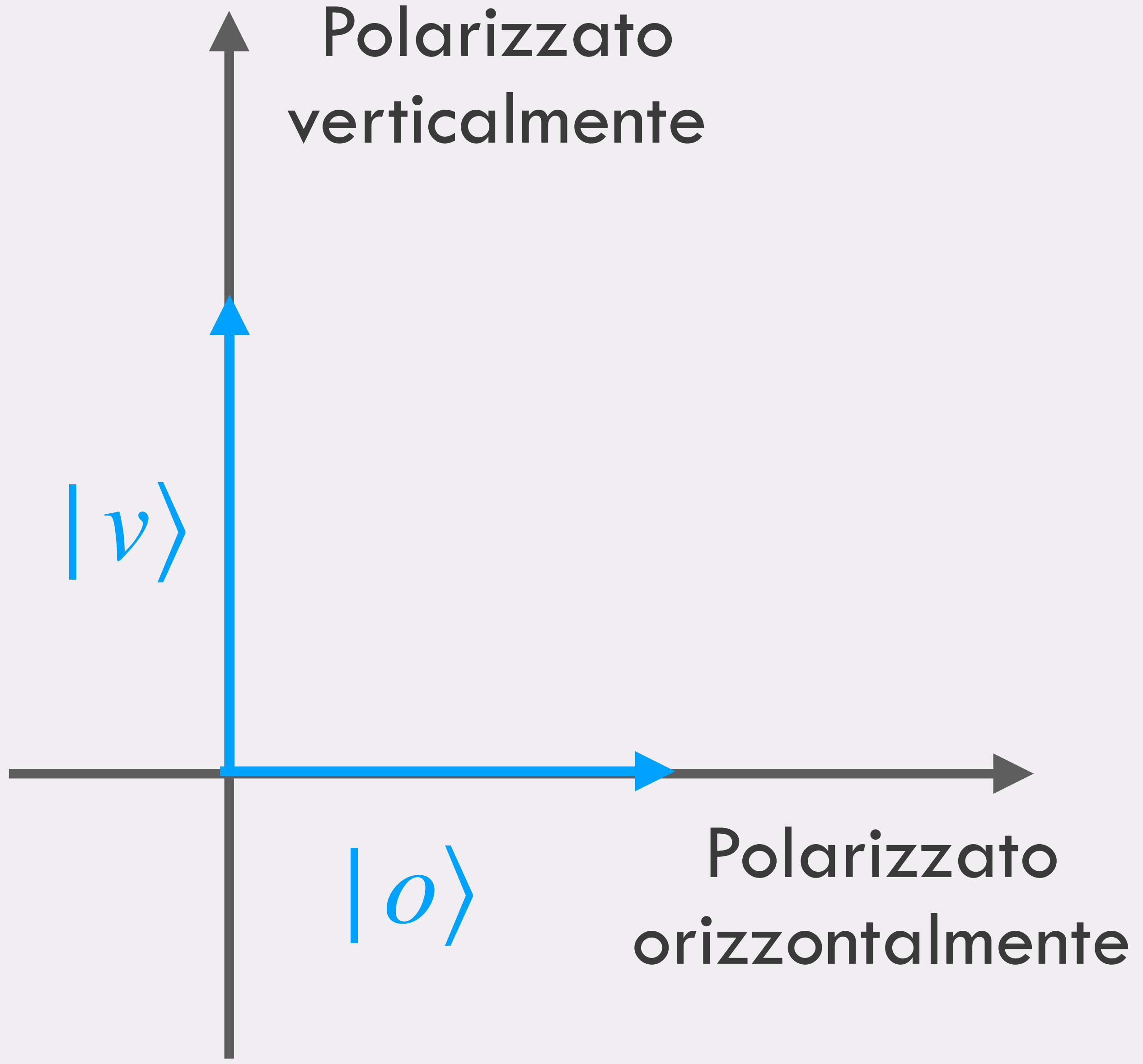
$$|\theta\rangle$$



- **DUE** POSSIBILITÀ **INDIPENDENTI** ⟶ **DUE** ASSI **ORTOGONALI**
  - Passa il polarizzatore verticale
  - Passa il polarizzatore orizzontale

stati base: $\langle o | v \rangle = 0$

- $|v\rangle$ = stato in cui si trova il fotone **se passa il filtro verticale**
- $|o\rangle$ = stato in cui si trova il fotone **se passa il filtro orizzontale**



- $|\theta\rangle$: **STATO** in cui si trova il fonte con una certa polarizzazione θ $\longrightarrow$ **VETTORE UNITARIO con 2 componenti**

$$|\theta\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$c_1 \longrightarrow |c_1|^2 = \left|\langle o|\theta\rangle\right|^2 =$ probabilità di passare un polarizzatore orizzontale

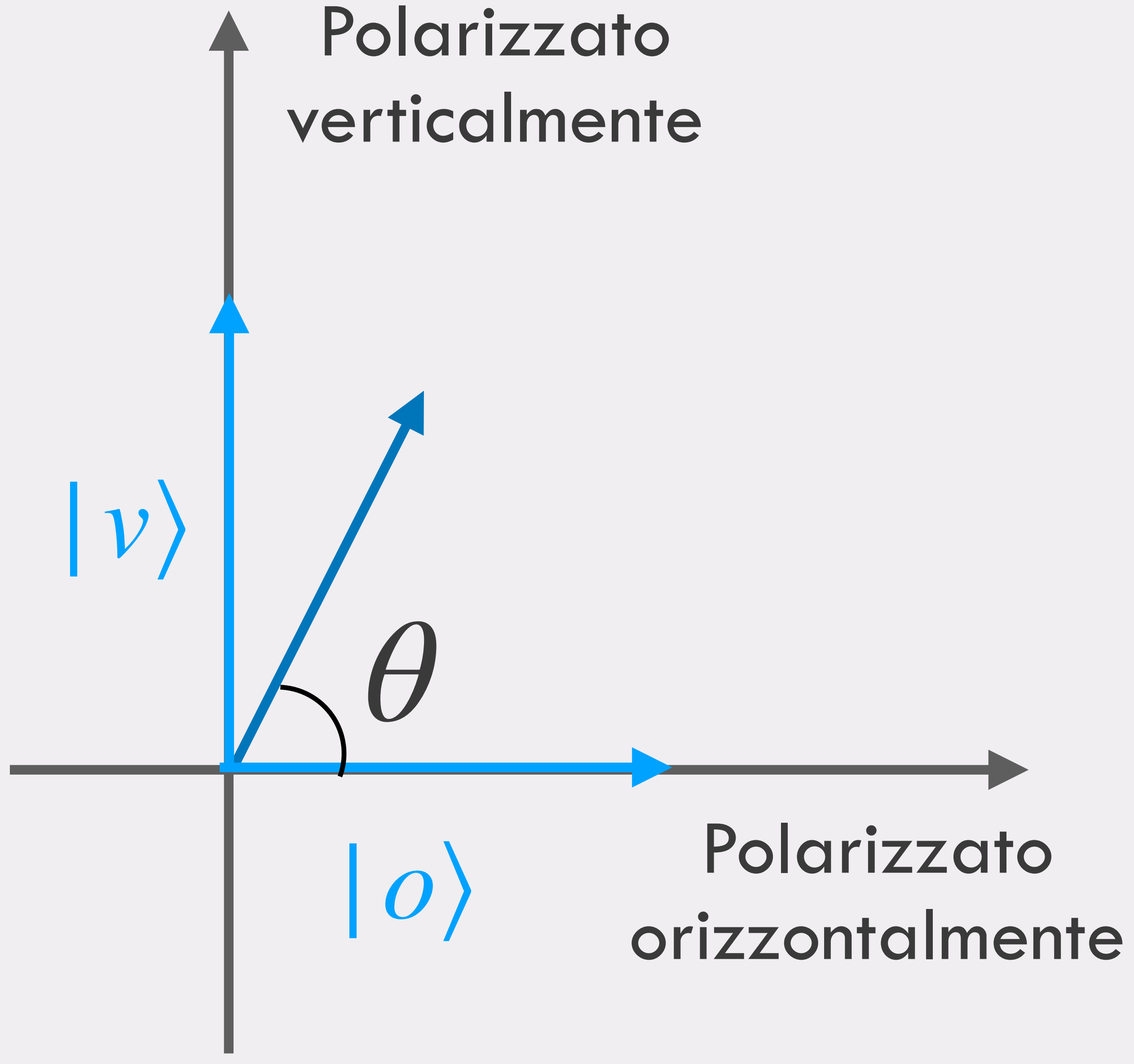
$c_2 \longrightarrow |c_2|^2 = \left|\langle v|\theta\rangle\right|^2 =$ probabilità di passare un polarizzatore verticale

Deve valere sempre:

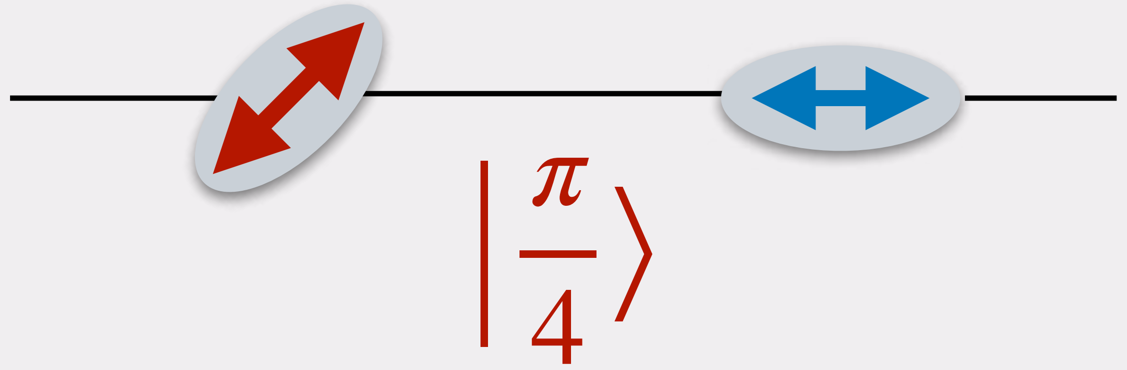
$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

$$|\theta\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle o|\theta\rangle \\ \langle v|\theta\rangle \end{pmatrix}$$

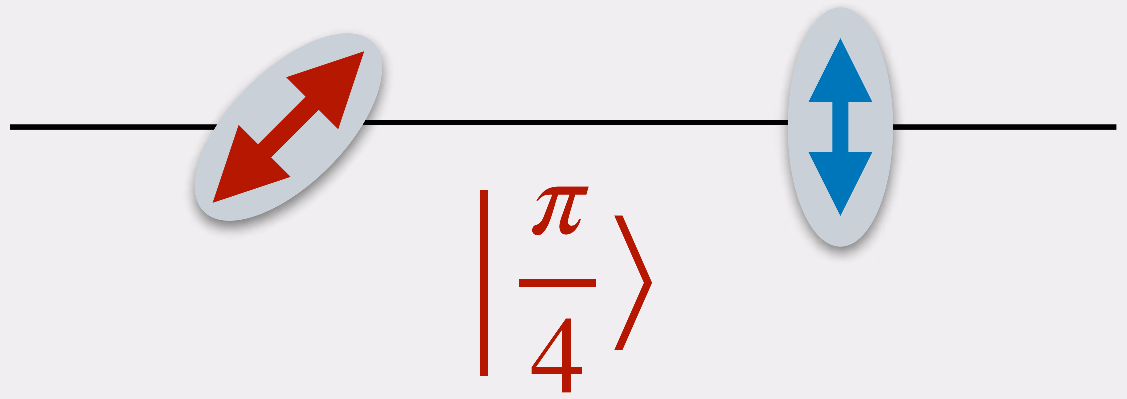
$$|\theta\rangle = \langle o|\theta\rangle|o\rangle + \langle v|\theta\rangle|v\rangle$$



$$\left|\frac{\pi}{4}\right\rangle$$



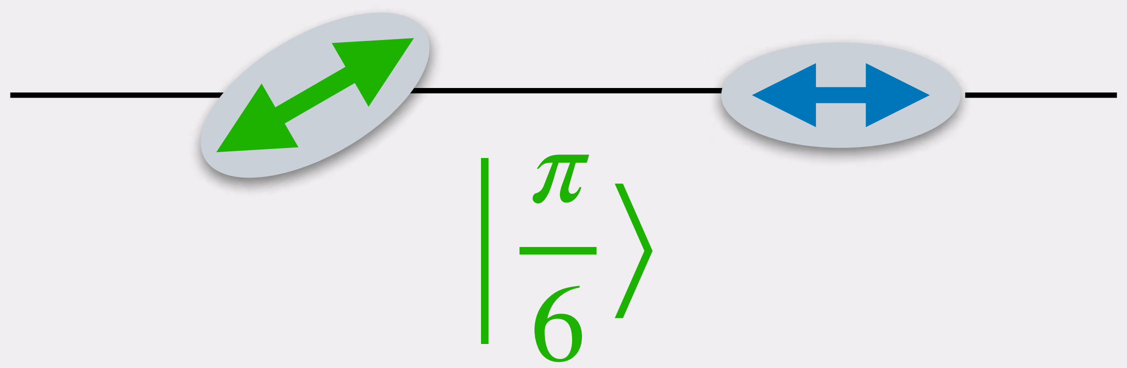
$$P = \left|\left\langle O\middle|\frac{\pi}{4}\right\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$



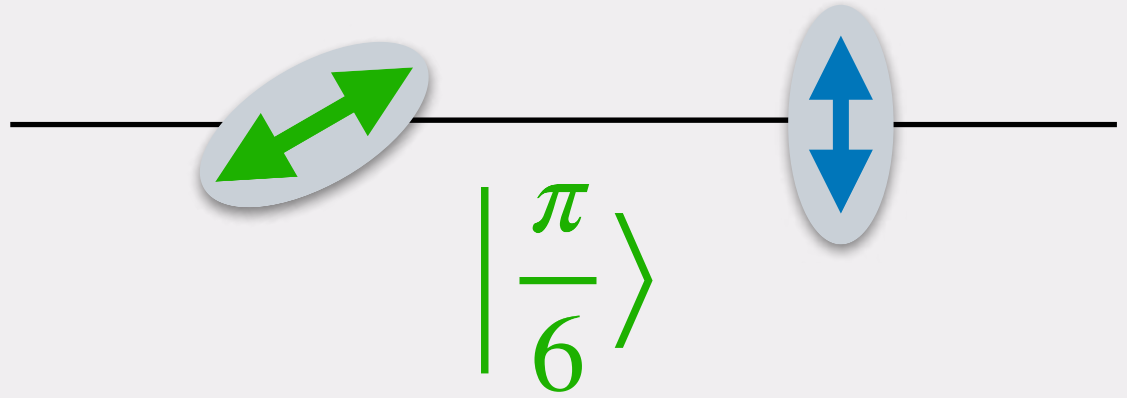
$$P = \left|\left\langle V\middle|\frac{\pi}{4}\right\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{\pi}{4}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|O> + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|V>$$

$$\left|\frac{\pi}{6}\right\rangle$$



$$P = \left|\left\langle O\middle|\frac{\pi}{6}\right\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

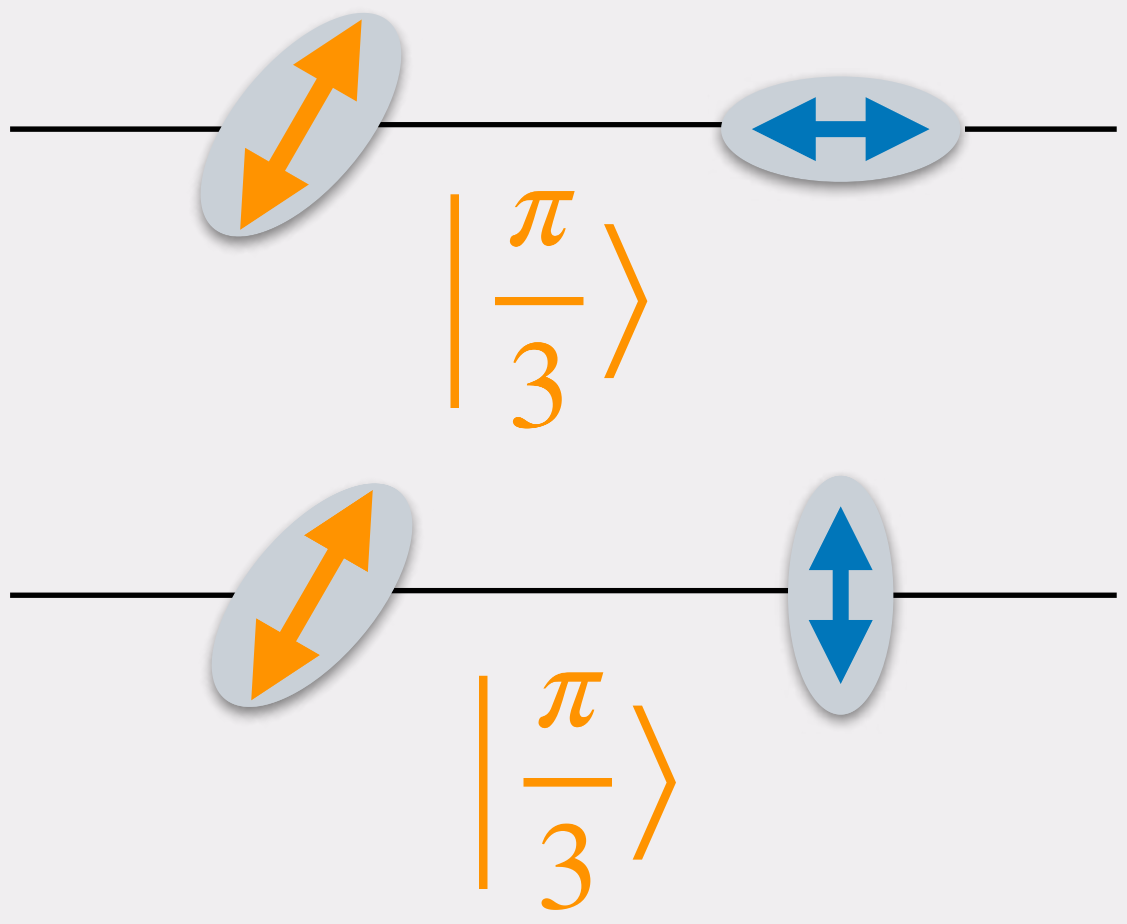


$$P = \left|\left\langle V\middle|\frac{\pi}{6}\right\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left|\frac{\pi}{6}\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|O> + \frac{1}{2}\,|V>$$

PROVA TU!

$$\left|\frac{\pi}{3}\right\rangle$$



$$P_O = ?? \longrightarrow P_O = \left|\left\langle O \middle| \frac{\pi}{3} \right\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P_V = ?? \longrightarrow P_V = \left|\left\langle V \middle| \frac{\pi}{3} \right\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

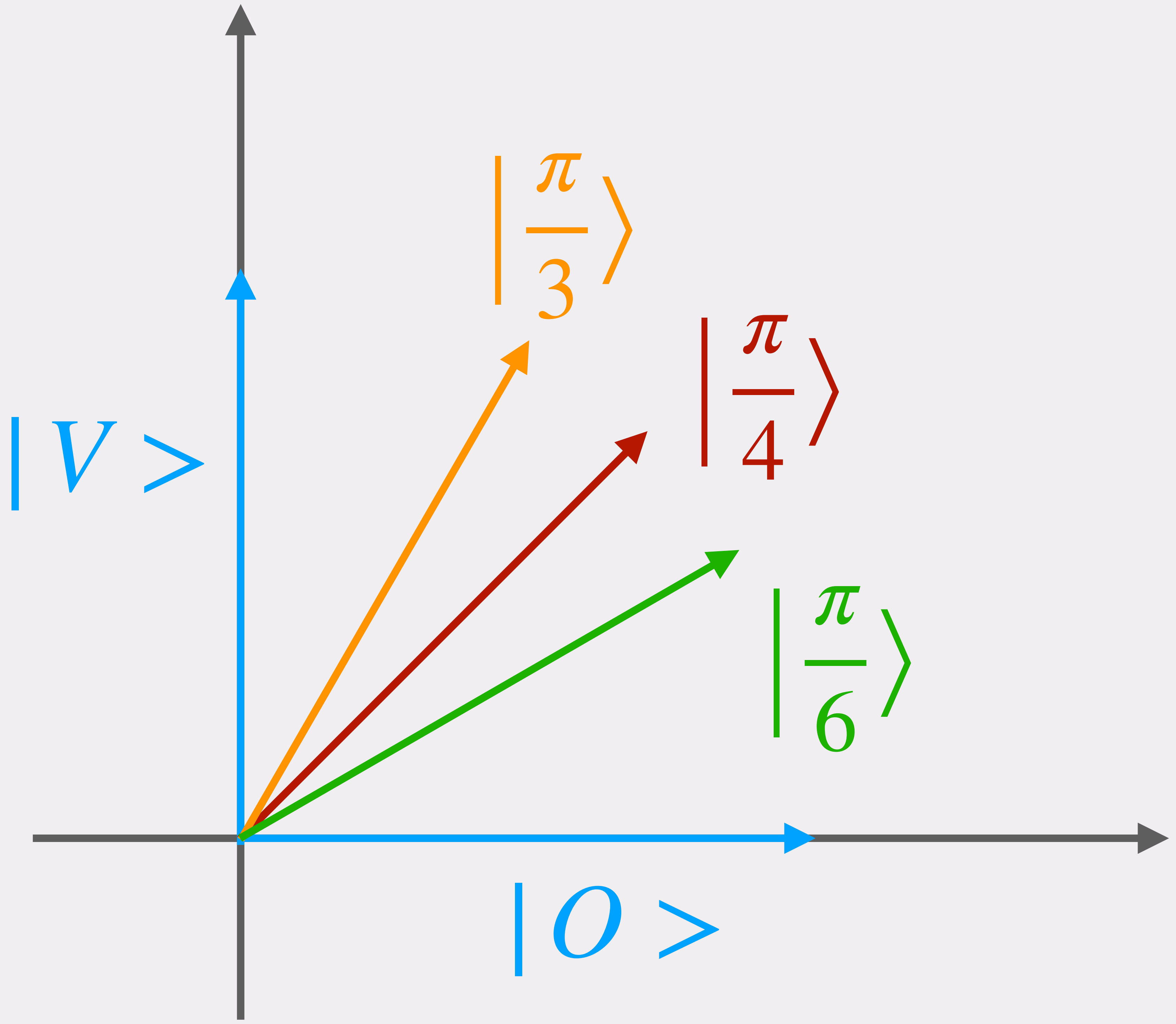
$$\left|\frac{\pi}{3}\right\rangle = \frac{1}{2}\,|O> + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|V>$$

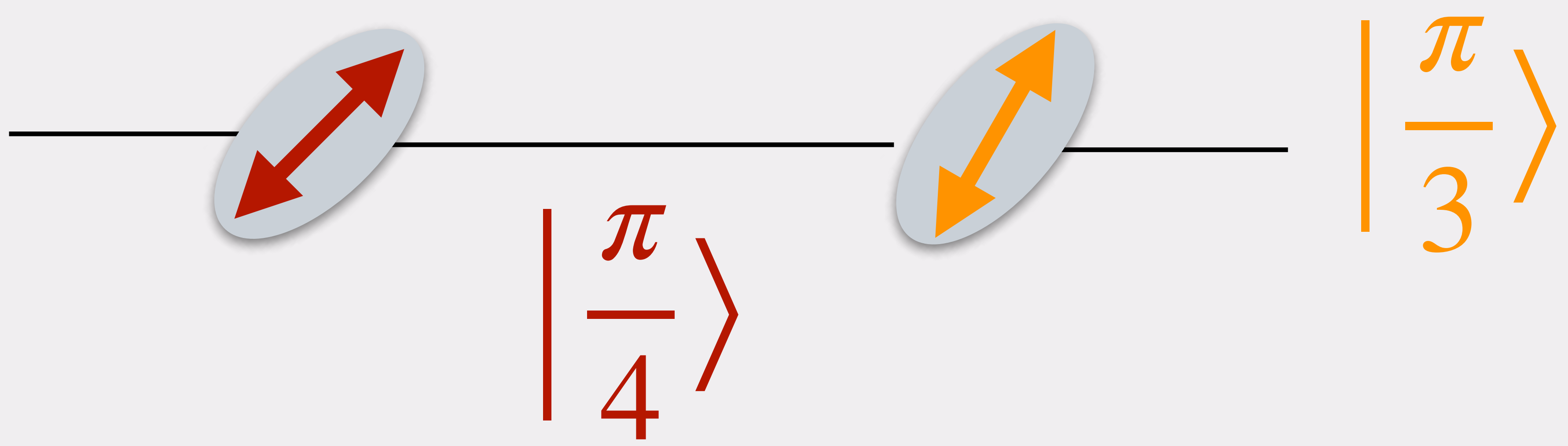
Come rappresento lo stato $|\theta>$?

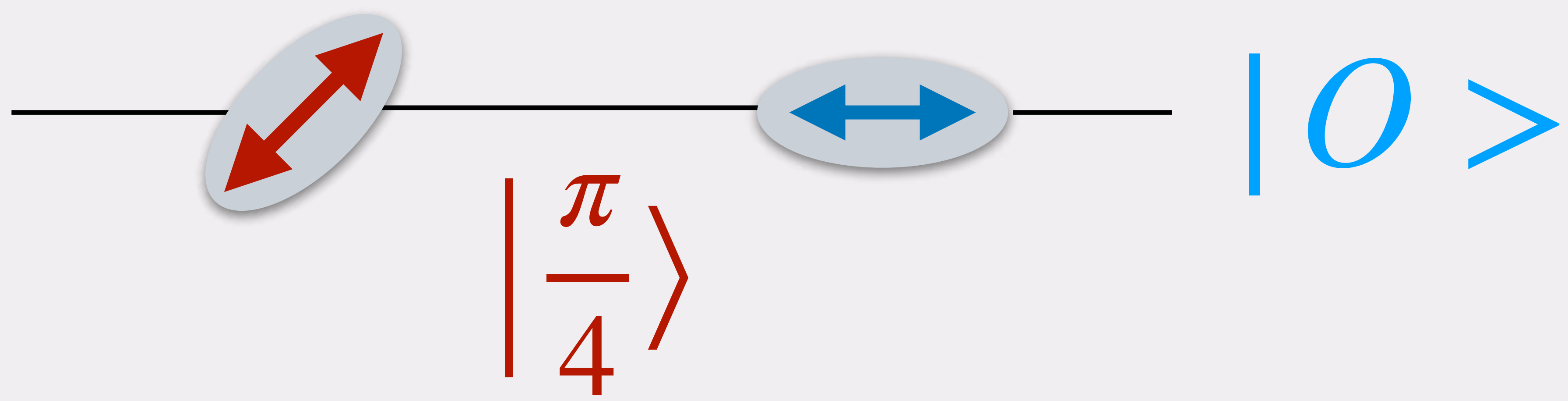
$$\left|\frac{\pi}{4}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|O> + \frac{1}{\sqrt{2}}|V>$$

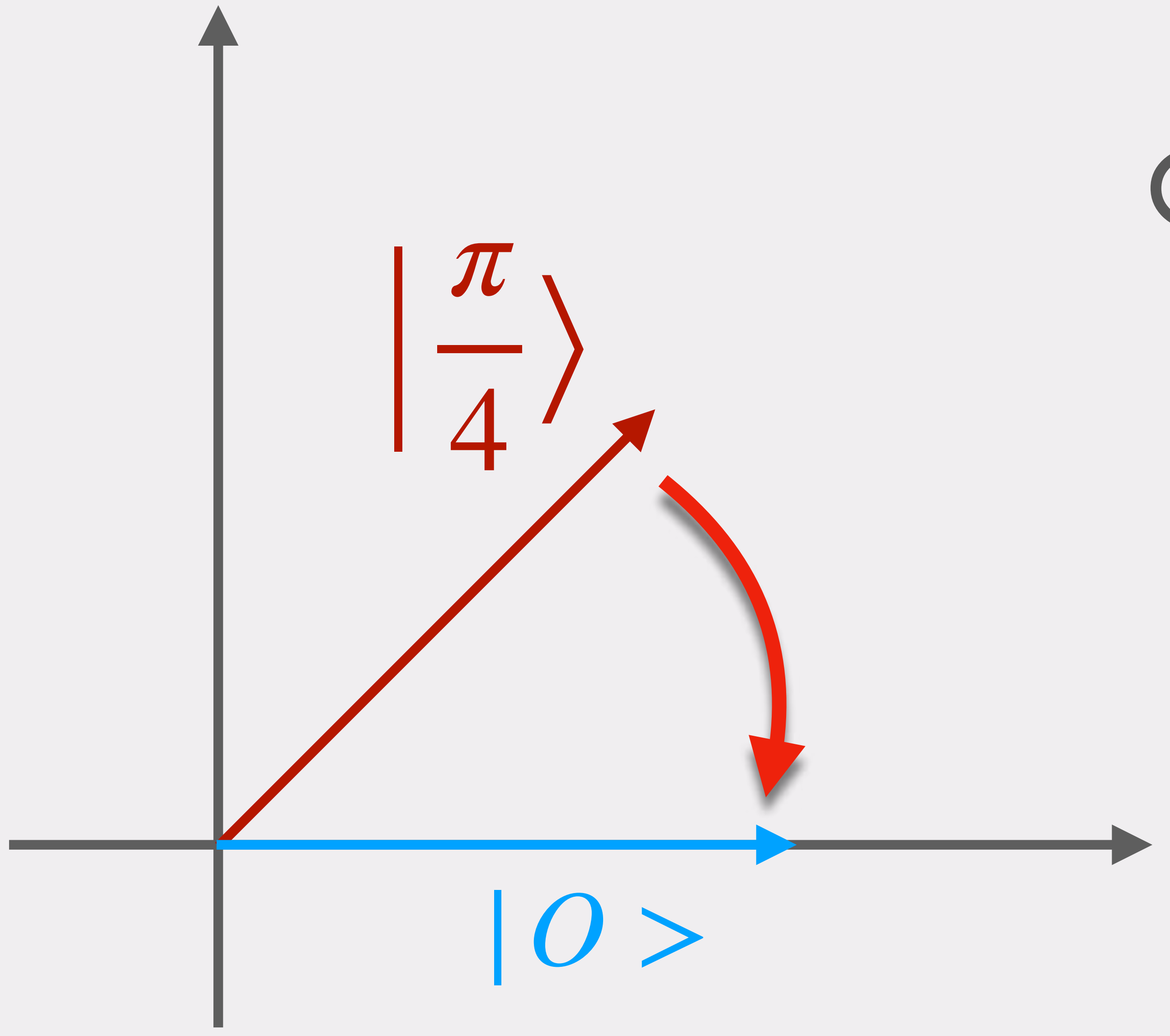
$$\left|\frac{\pi}{3}\right\rangle = \frac{1}{2}\,|O> + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|V>$$

$$\left|\frac{\pi}{6}\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|O> + \frac{1}{2}\,|V>$$









Quando effettuo una misura sullo stato, esso **collassa** in un altro stato che corrisponde allo stato che rappresenta il risultato della misura.

Esperimento interessante

1

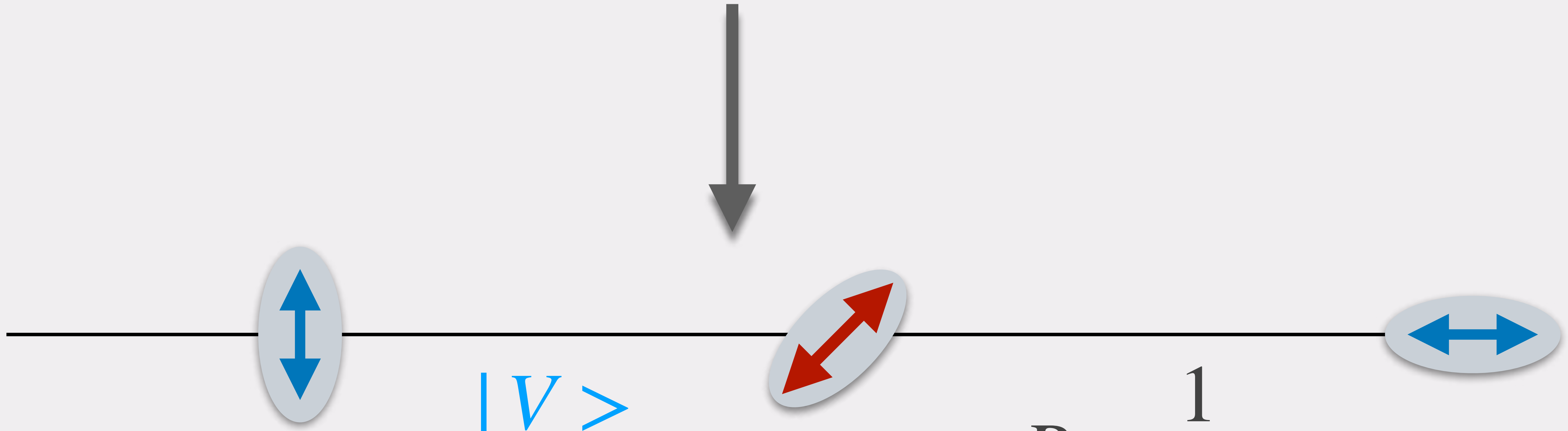
$|V>$

$$P = |<O|V>|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2

$|V>$

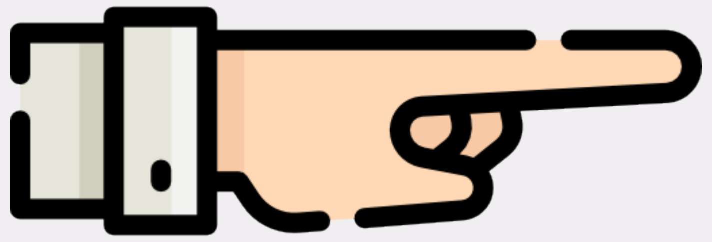
$$P = \left|\left\langle \frac{\pi}{4} \middle| V \right\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$



$|V>$

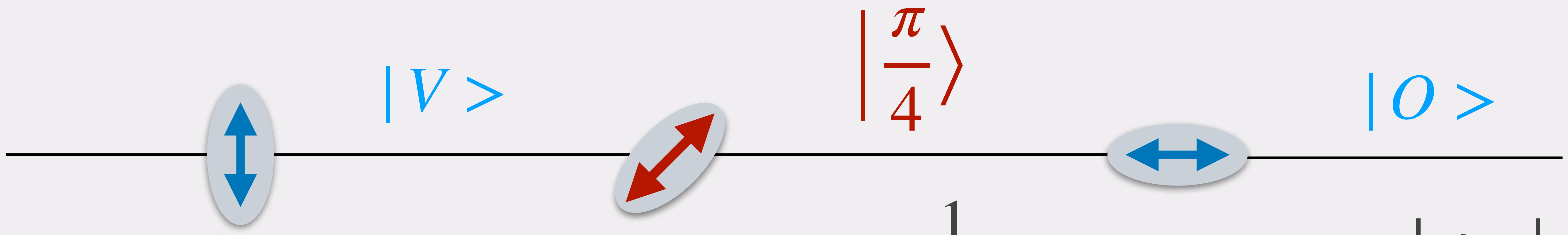
$$P = \frac{1}{2}$$

??



PROVA TU!

Esperimento interessante

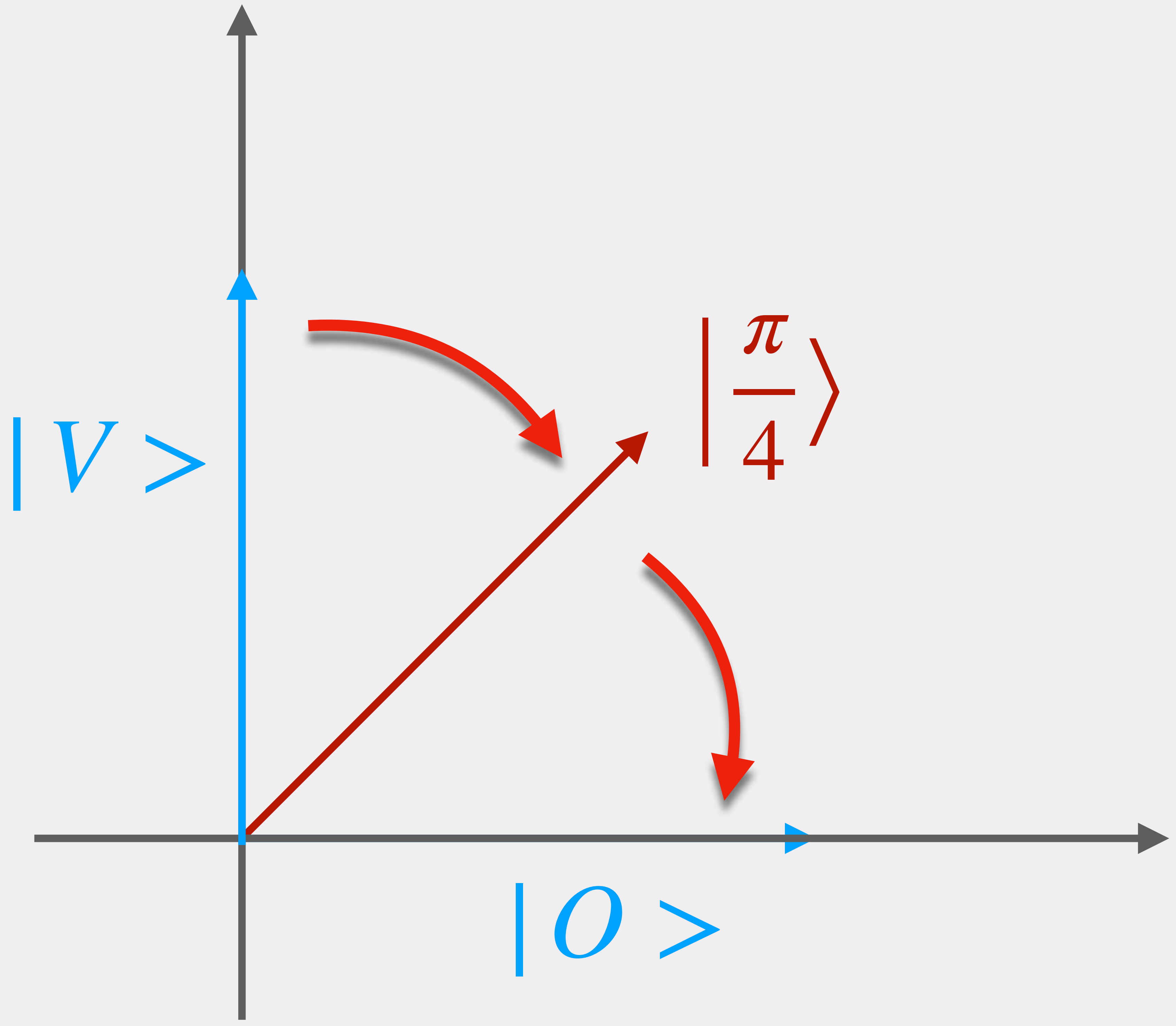


$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{1}{2}$$

$$P = \left|\left\langle O \middle| \frac{\pi}{4} \right\rangle\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Misurare la polarizzazione a $\frac{\pi}{4}$ cambia lo stato!



Il SECONDO POSTULATO della meccanica quantistica

II postulato

Quando effettuo una misura sullo stato, esso **collassa** in un stato diverso che corrisponde a quello che rappresenta il risultato della misura.

Uno degli **STATI BASE**

$$|\Psi\rangle = \psi_1 |e_1\rangle + \psi_2 |e_2\rangle + \psi_3 |e_3\rangle + ..$$

$|\psi_i|^2 = \left|\langle e_i|\Psi\rangle\right|^2$: **PROBAILITÀ**

STATI POSSIBILI
dopo la misura

Gli esperimenti a
SINGOLO QUANTO

L’effetto della misura nell’esperimento della doppia fenditura

Perché sapendo da che fenditura è passato l’elettrone **la figura di interferenza scompare**??

Perché abbiamo effettuato una misura!

- Se **non sappiamo** da quale fenditura è passato, lo stato in cui si trova l’elettrone è uno stato di sovrapposizione

$$|e^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)$$

COMPARE LA FIGURA DI INTERFERENZA

- Se invece **sappiamo** da quale fenditura è passato (perché abbiamo effettuato una misura), lo stato non è più uno stato di sovrapposizione ma è uno degli stati base

$$|e^-\rangle = |1\rangle \qquad |e^-\rangle = |2\rangle$$

NON COMPARE LA FIGURA DI INTERFERENZA

Cambia lo stato, cambia il risultato fisico

L'effetto della misura nell'esperimento dell'interferometro

Perché, sapendo che percorso ha preso il fotone, **trovo luce anche in A**??

Perché abbiamo effettuato una misura!

- Se **non sappiamo** che percorso ha preso, lo stato in cui si trova il fotone è uno stato di sovrapposizione

$$|e^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\rightarrow\rangle + |\uparrow\rangle\right)$$

IL FOTONE VIENE RIVELATO SOLO DAL RIVELATORE B

- Se invece **sappiamo** che percorso ha preso, lo stato non è più uno stato di sovrapposizione ma è uno degli stati base

$$|e^-\rangle = |\rightarrow\rangle \qquad |e^-\rangle = |\uparrow\rangle$$

IL FOTONE VIENE RIVELATO **ANCHE** DAL RIVELATORE A

Gli OPERATORI

$\hat{O}$

Definizione

Un operatore $\hat{O}$, in meccanica quantistica, è quel qualcosa che **modifica lo stato del sistema**.

In generale un operatore trasforma un vettore in un altro vettore, infatti, consideriamo un generico vettore $|a>$ allora:

$$\hat{O}\,|a\rangle = |b\rangle$$

Come lo trattiamo dal punto di vista matematico?

Dato che la teoria della meccanica quantistica è una **teoria lineare**, possiamo pensare che anche l'operatore abbia questa caratteristica:

- $\hat{O}\big(|a\rangle + |b\rangle\big) = \hat{O}|a\rangle + \hat{O}|b\rangle$
- $\hat{O}\big(c|a\rangle\big) = c\ \big(\hat{O}|a\rangle\big)$

MATRICE $\hat{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

La **dimensione** dipende dalle dimensioni dello spazio di Hilbert, quindi dalle possibilità!

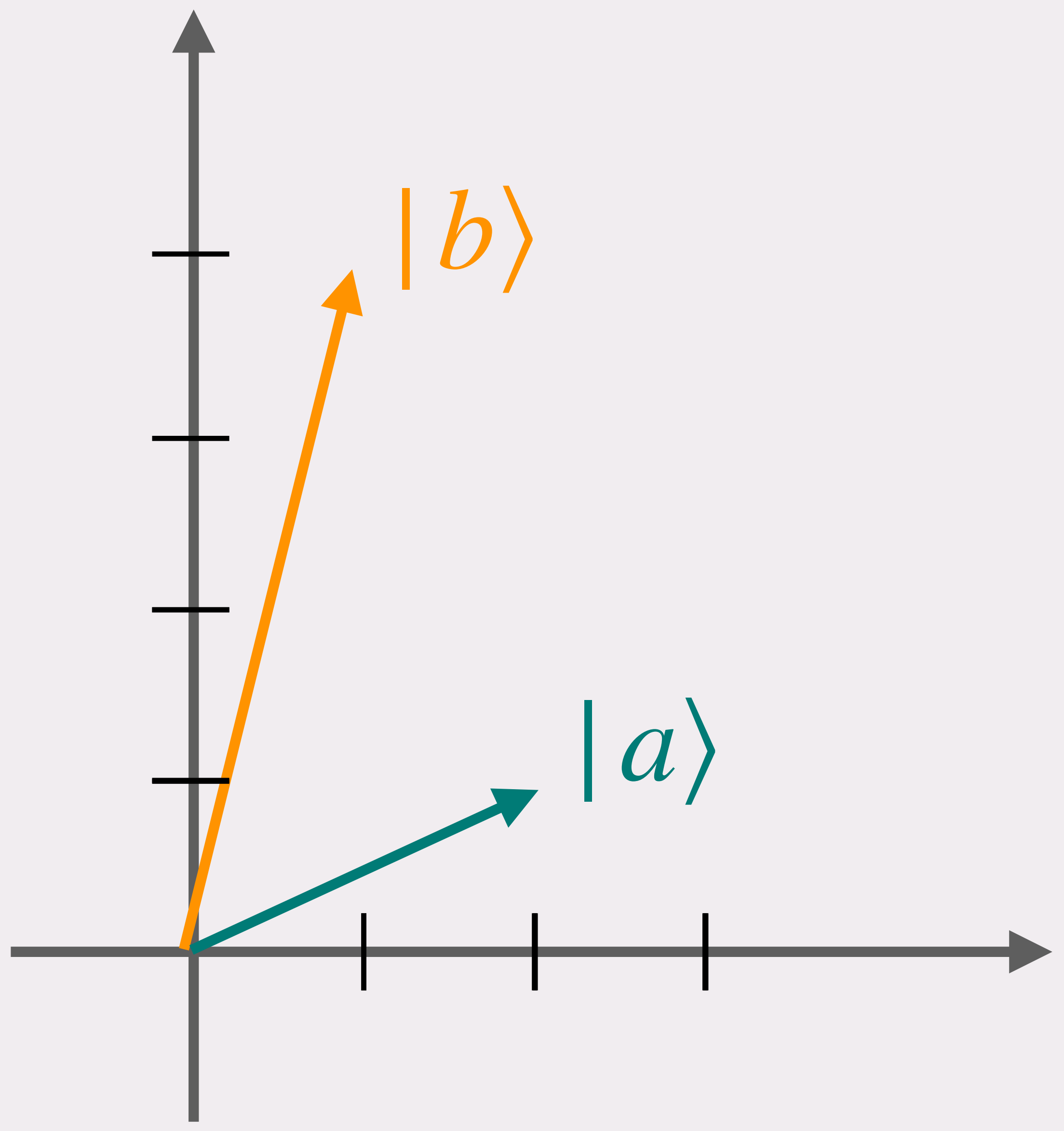
Operatori e vettori

Scrivendo l'operatore $\hat{O}$ come matrice, applicare l'operatore ad un vettore significa semplicemente risolvere il **prodotto matrice-vettore**.

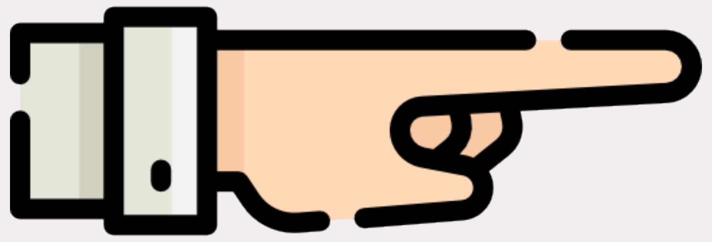
Facciamo un esempio: $|a\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{O}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\hat{O}_1 |a\rangle = |b\rangle$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Operatori e vettori



PROVA TU!

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \hat{O}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{O}_2 |b\rangle = |c\rangle$$

Confronta quello che hai ottenuto utilizzando

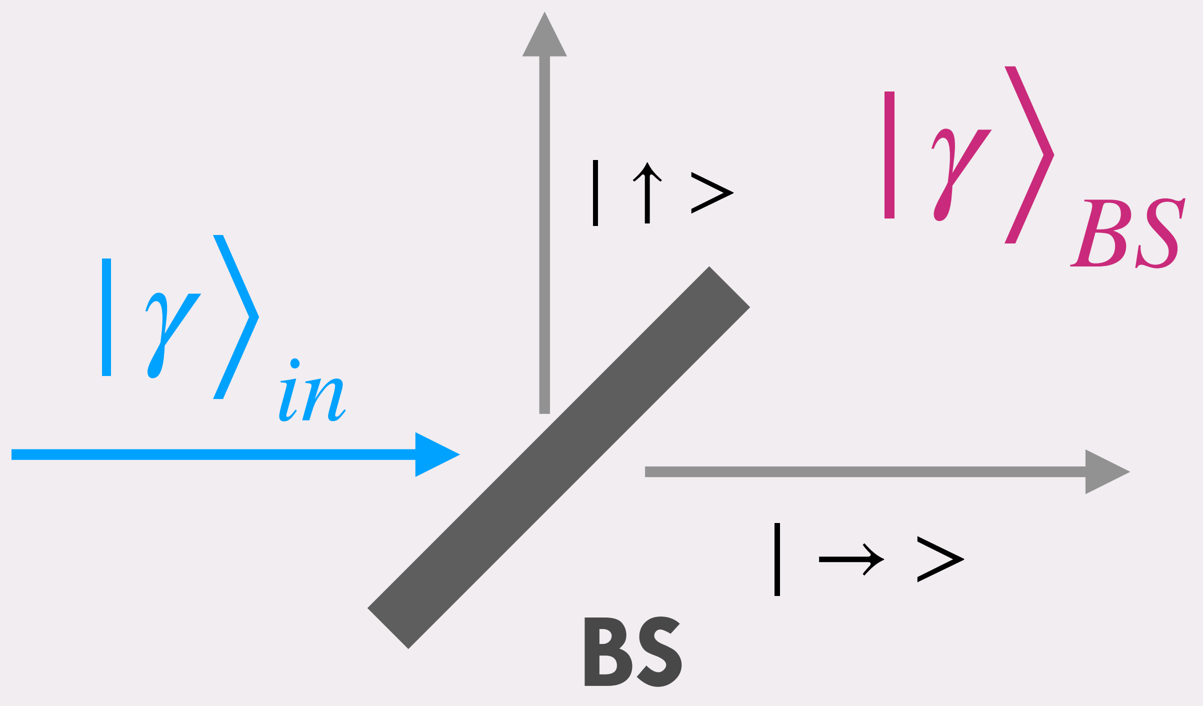
GeoGebra [Link GeoGebra: Operatore]

Utilizzando sempre lo stesso link, prova a variare il vettore iniziale $|b\rangle$ (spostandolo nel grafico) e vedere come varia $|c\rangle$

L'interferometro

L'operatore Beam Splitter

- Possiamo associare al BS un operatore $\hat{BS}$, esso, infatti, trasforma:
  - lo stato iniziale $|\gamma\rangle_{in} = |\rightarrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
  - nello stato finale $|\gamma\rangle_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\rightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$



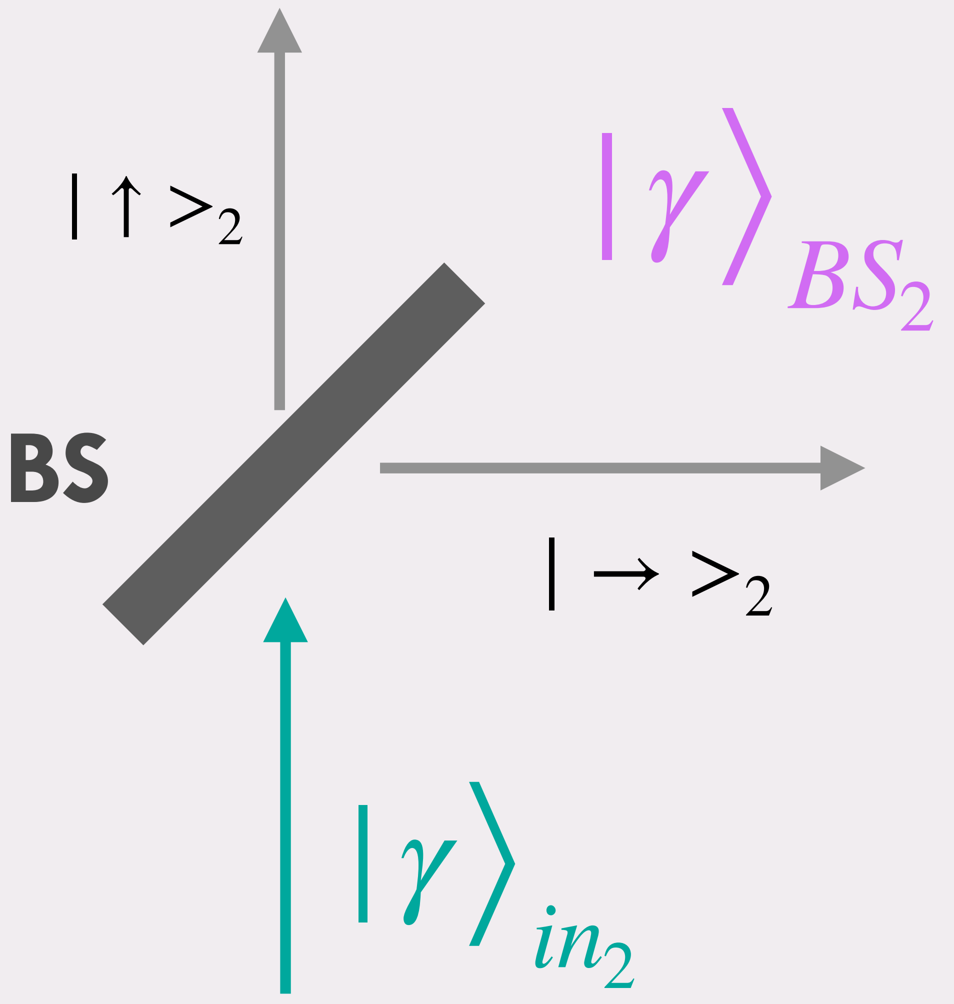
$$\hat{BS} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftarrow \boxed{\hat{BS}|\gamma\rangle_{in} = |\gamma\rangle_{BS}}$$

In forma matriciale

$$\underline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a\cdot 1 + b\cdot 0 \\ c\cdot 1 + d\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

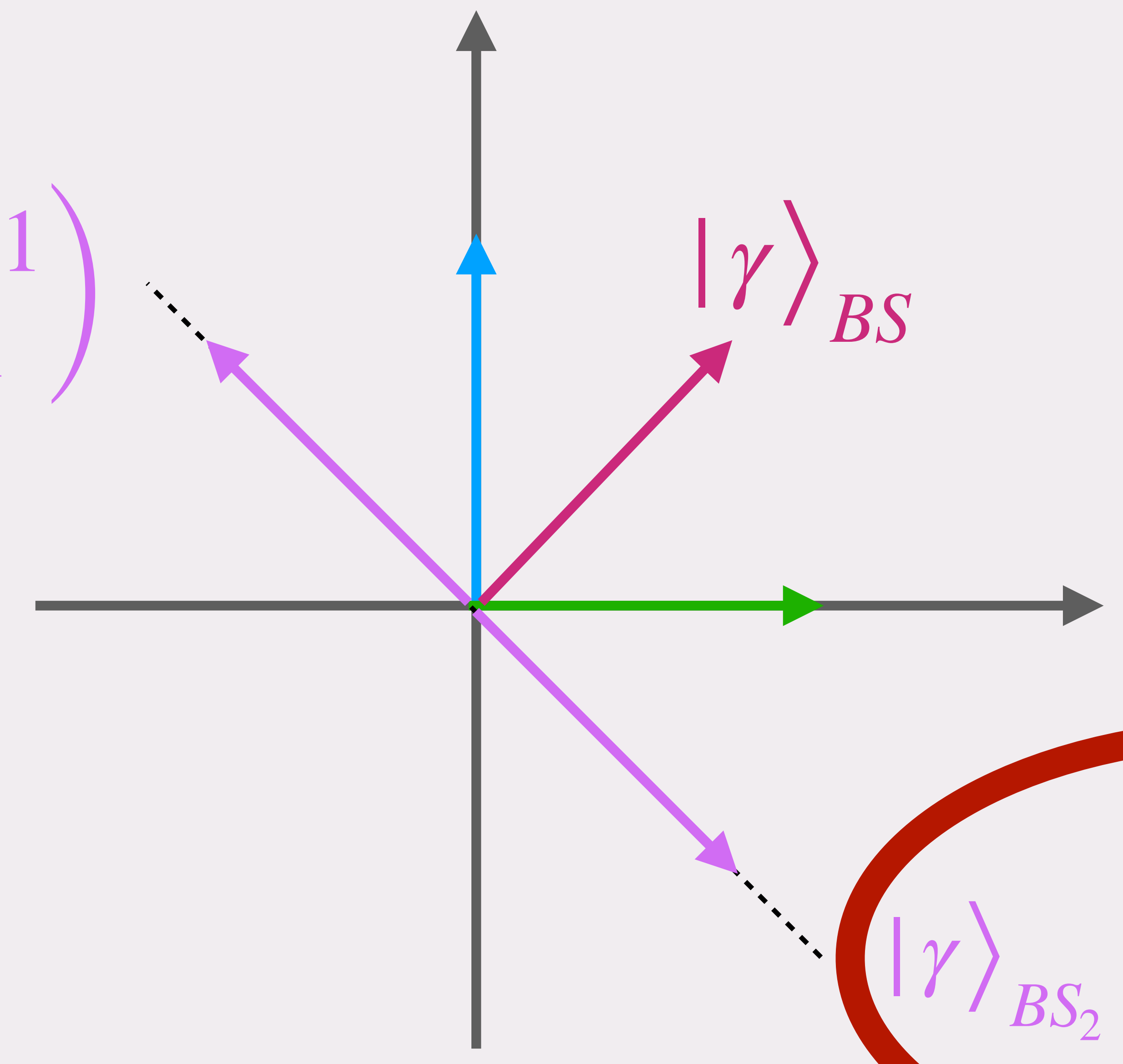
- Per determinare b e d consideriamo ora la seguente situazione:
  - lo stato iniziale $|\gamma\rangle_{in_2} = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - nello stato finale $|\gamma\rangle_{BS_2} = ???$



- Se rappresentiamo questi stati nello **spazio di Hilbert** vediamo che:
  - $|\gamma\rangle_{in_2}$ è ortogonale a $|\gamma\rangle_{in}$
  - $|\uparrow>_2$ è ortogonale a $|\uparrow>$
  - $|\rightarrow>_2$ è ortogonale a $|\rightarrow>$

$|\gamma\rangle_{BS_2}$ è ortogonale a $|\gamma\rangle_{BS}$

$$|\gamma\rangle_{BS_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

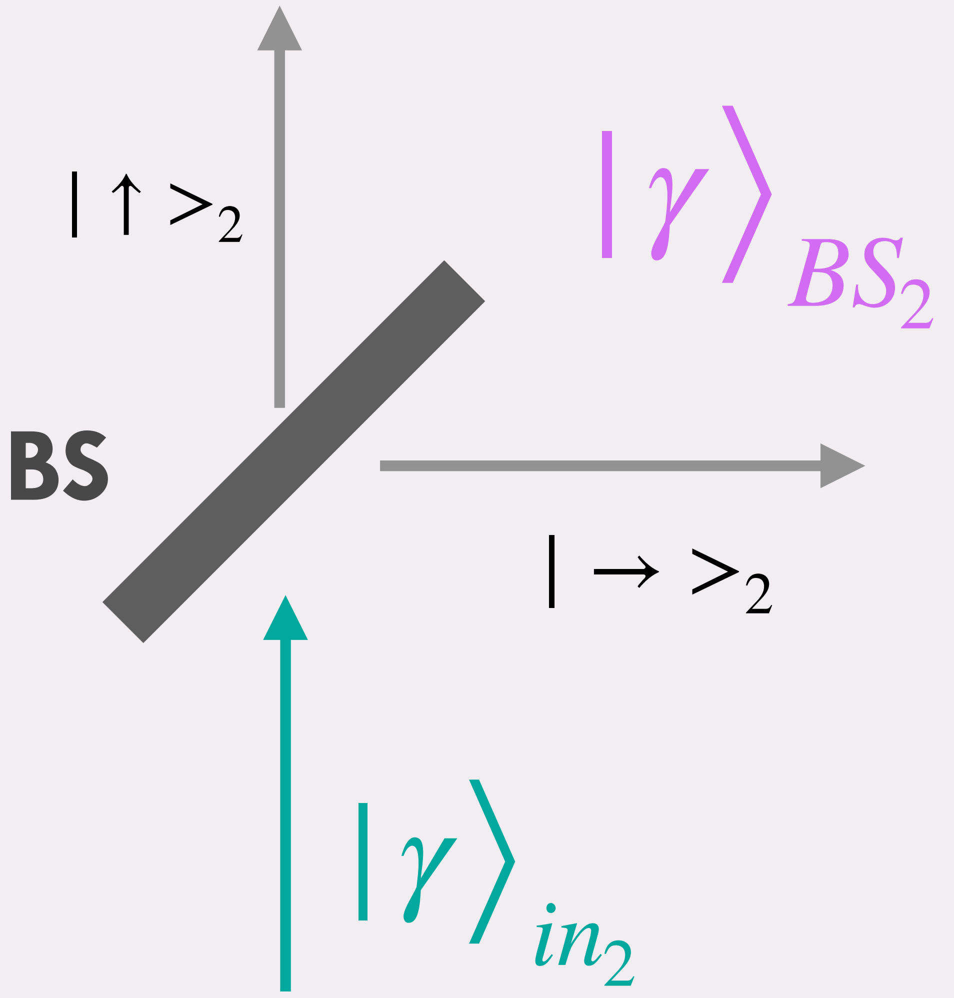


$$|\gamma\rangle_{BS_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Può essere uno dei due vettori (in viola), tuttavia per considerazioni di tipo geometrico quello corretto è quello cerchiato

- Ripetiamo quindi il ragionamento precedente:

  - lo stato iniziale $|\gamma\rangle_{in_2} = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - nello stato finale $|\gamma\rangle_{BS_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



$$\hat{B}S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftarrow \boxed{\hat{B}S\,|\gamma\rangle_{in_2} = |\gamma\rangle_{BS_2}}$$

In forma matriciale

$$\underline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ d = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

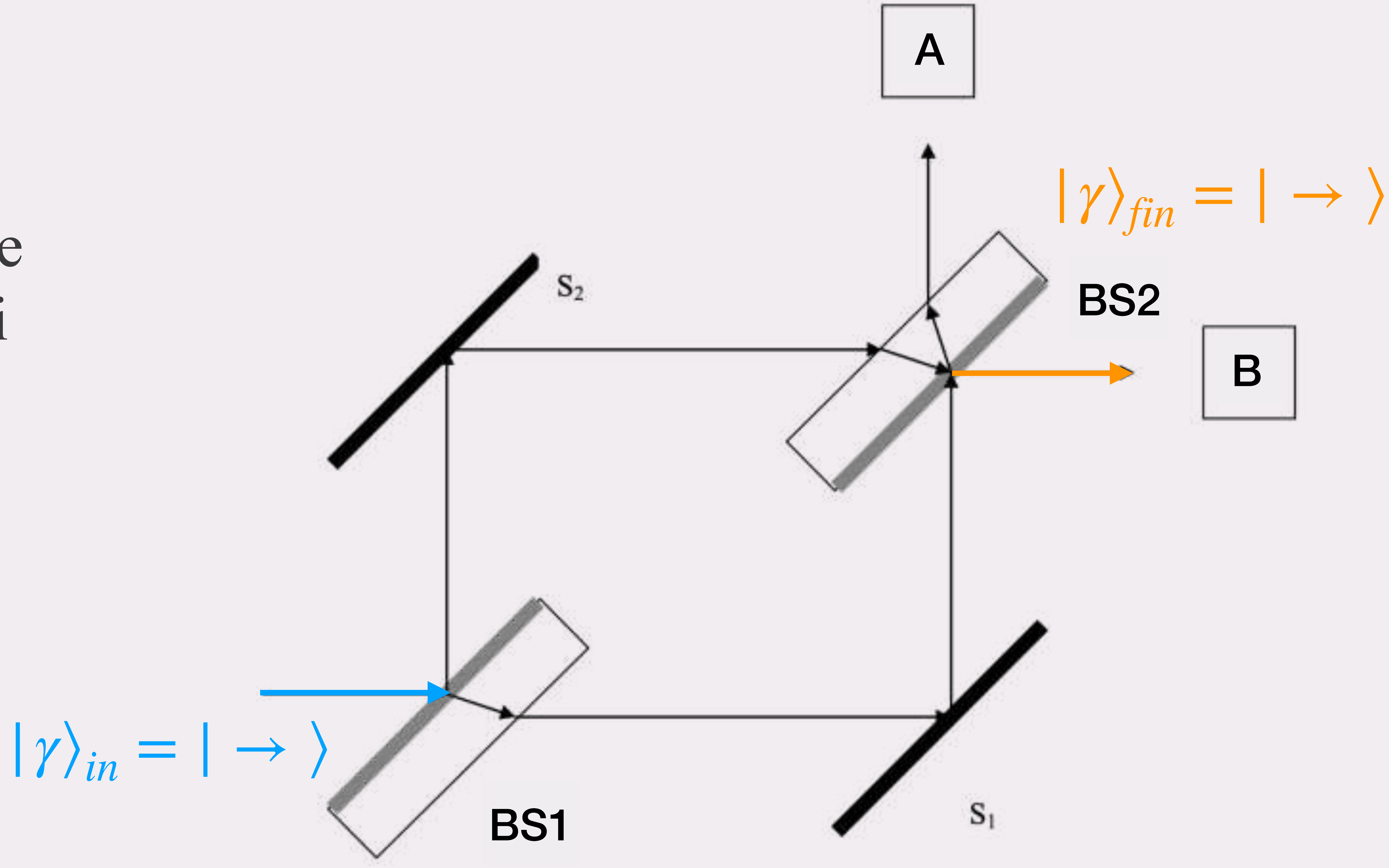
- Abbiamo quindi definito l'operatore associato al beam splitter:

$$\boxed{\hat{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Studiamo l'intero interferometro!

- Utilizzando tutto quello che sabbiamo, proviamo a dimostrare che lo stato finale del fotone è $|\gamma\rangle_{fin} = |\rightarrow\rangle$ e che quindi scatta sempre e solo il rivelatore B

$$\boxed{|\gamma\rangle_{fin} = \hat{BS}_2\left[\hat{BS}_1\,|\gamma\rangle_{in}\right]}$$



- Possiamo subito sostituire:

$$|\gamma\rangle_{fin} = \hat{BS}_2\left[\underbrace{\hat{BS}_1\,|\gamma\rangle_{in}}_{|\gamma\rangle_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}\right]$$

- Scriviamo in forma matriciale:

$$|\gamma\rangle_{fin} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$$

!! **Abbiamo capito** perché tutti i fotoni arrivano sempre il B

Lo stato finale in cui si trova il fotone è: $|\gamma\rangle_{fin} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$|1|^2$: probabilità di essere trasmesso
$\mathscr{P} = 1$

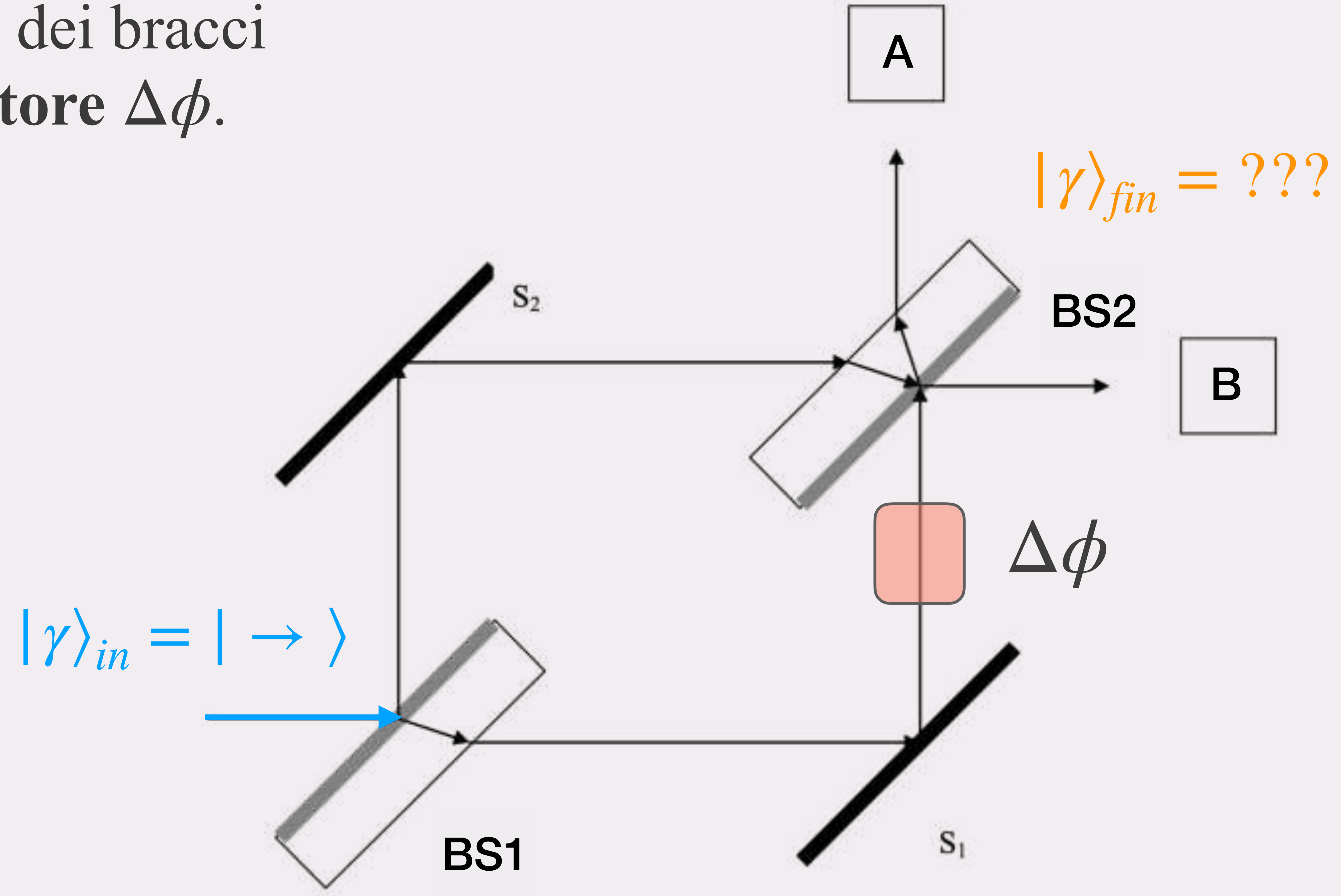
$|0|^2$: probabilità di essere riflesso
$\mathscr{P} = 0$

Interferometro: introduciamo uno sfasamento

Supponiamo di inserire in uno dei bracci dell'interferomero uno **sfasatore** $\Delta\phi$.

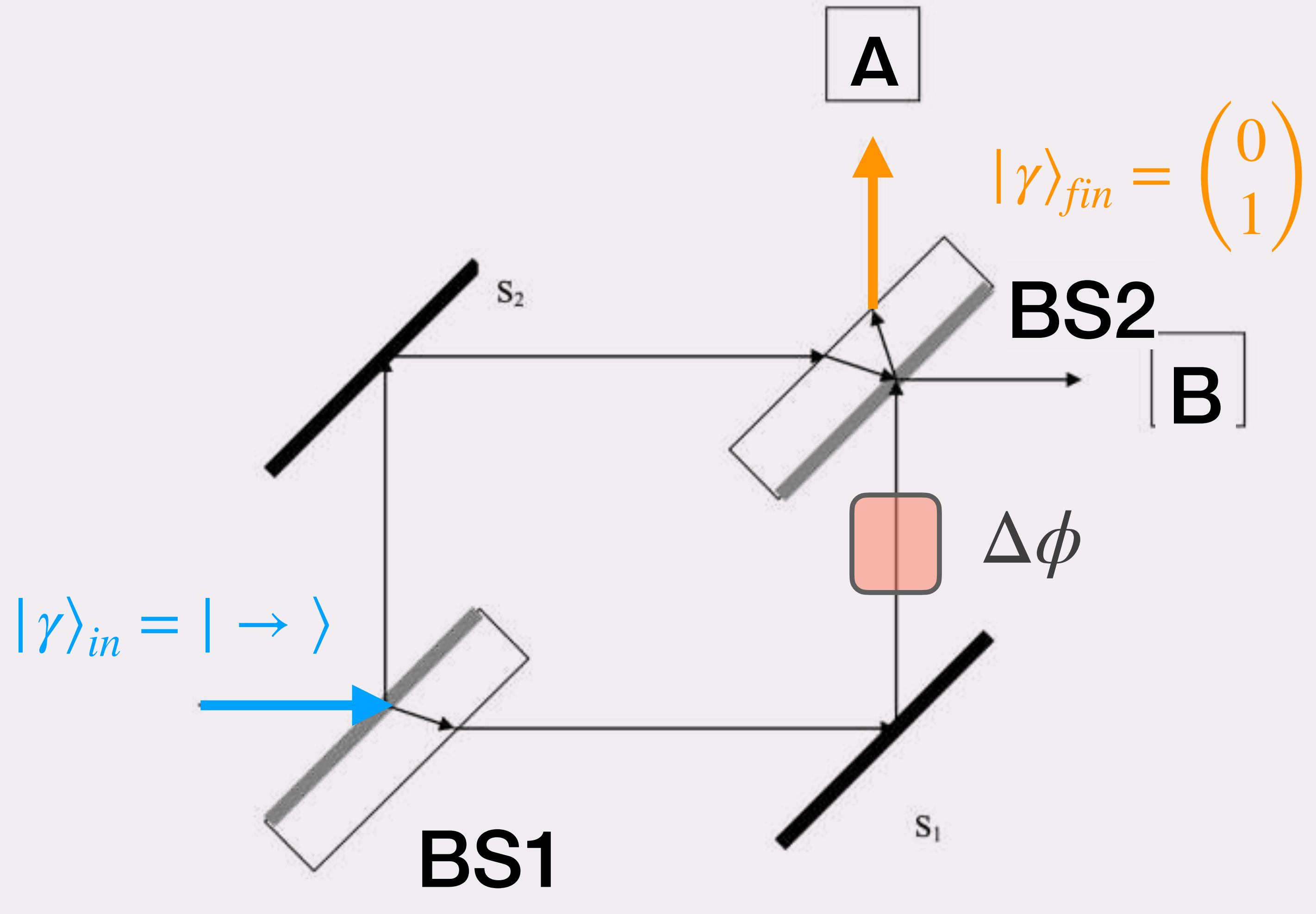
Lo stato finale dipenderà anche da questo:

$$\boxed{|\gamma\rangle_{fin} = \hat{BS}\,\hat{\phi}\,\hat{BS}\,|\gamma\rangle_{in}}$$



Sfasamento di π

- Determiniamo l'**operatore associato allo sfasatore**, supponendo che introduca uno sfamento di π: questo sperimentalmente si traduce nel fatto che tutti i fotoni **arrivino in A**



$$|\gamma\rangle_{fin} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|\gamma\rangle_{fin} = \hat{BS}\,\hat{\Pi}\,\hat{BS}\,|\gamma\rangle_{in}}$$

- Scriviamolo in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Risolvendola si ottiene:

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sfasamento generico

- Abbiamo visto che l'operatore associato allo sfasamento di π posso rappresentano con questa matrice:

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Confrontando questa matrice con la matrice identità: notiamo che l'unica differenza è l'ultimo termine

$$\hat{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

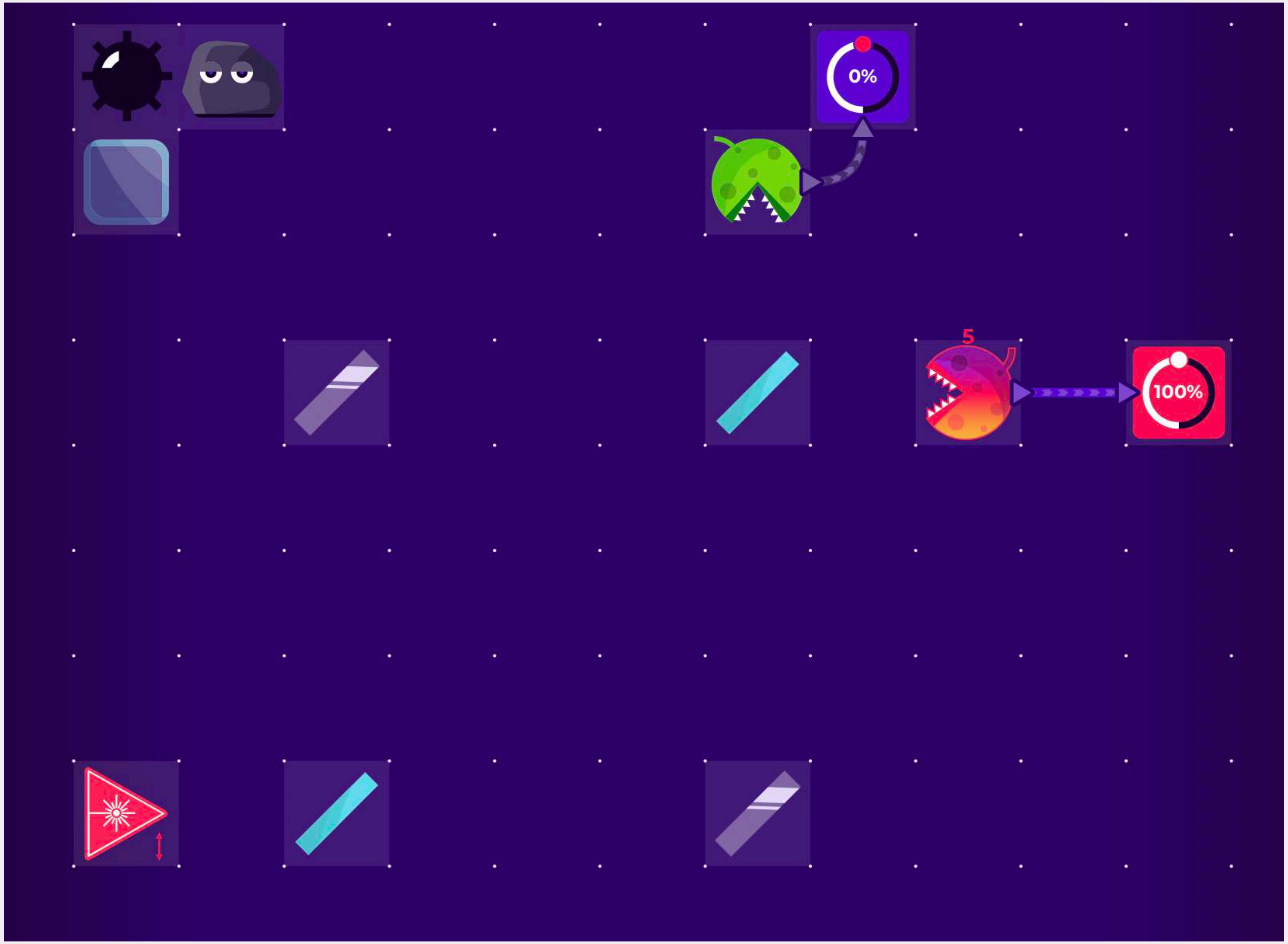
- Poiché moltiplicano un vettore per la matrice identità non lo modifica, possiamo pensare che sia quest'ultimo termine a definire lo sfasamento.

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$
$$e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

$$\boxed{\hat{\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}}$$

Simulatore interferometro



[Link della simulazione]