

Energia

Quantità
di moto

Momento
angolare



Spin

OSSERVABILI

La Meccanica Classica

- Lo stato del sistema è completamente definito una volta che vengono definite:
 - la posizione
 - la quantità di moto



Definendo lo stato, anche le osservabili lo sono!

Conoscendo infatti la posizione e la quantità di moto posso, ad esempio, calcolare:

L'energia meccanica

$$E = E_c + U(x)$$

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

$$U_e \propto x^2$$
$$U_c \propto \frac{1}{r}$$

Il momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

La Meccanica Quantistica

- Lo stato del sistema contiene informazioni sulla probabilità di ottenere certi risultati ma **NON** ci permette di determinare tali risultati.



In meccanica quantistica per definire le osservabili dobbiamo **agire** sul sistema **causandone una modifica**.



Il processo di misura cambia lo stato del sistema!



OPERATORE

OSSERVABILI



OPERATORI



Come sono fatti gli operatori associati alle osservabili?

Formalizzazione matematica del processo di misura

Abbiamo bisogno dei seguenti concetti:

- AUTOVALORI e AUTOVETTORI**
- PROIETTORE**

Autovalori e Autovettori



● Definizione

Considerando un operatore \hat{O} , esistono dei **vettori particolari** tali per cui l'azione di questo operatore su di essi dà come risultato il vettore stesso moltiplicato per una **costante**.

$$\hat{O} |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$$

Operator ← \hat{O} λ (Autovalore) $|\lambda\rangle$ (Autovettore)



EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI

● Calcolo autovettori e autovalori: metodo GRAFICO

Graficamente:

- gli **autovettori** sono quei vettori la cui direzione non viene modificata dopo l'applicazione dell'operatore;
- gli **autovalori** indicano di quanto il vettore di partenza è “cambiato”, ossia di quanto si è allungato o accorciato dopo l'applicazione dell'operatore

- ↓
- Definiamo graficamente, tramite [GeoGebra](#), **autovalori** e **autovettori** di alcuni operatori, definiti dalle seguenti matrici:

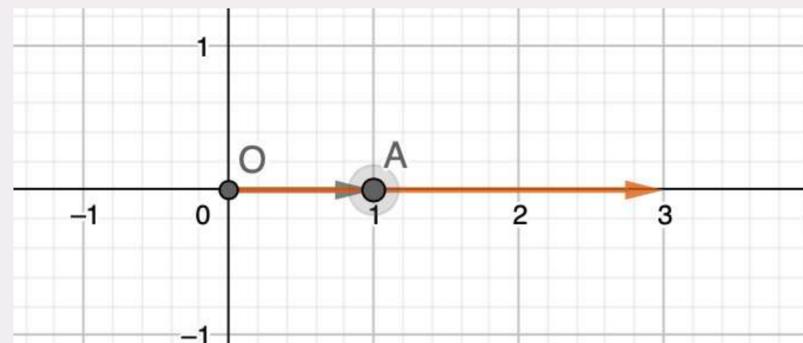
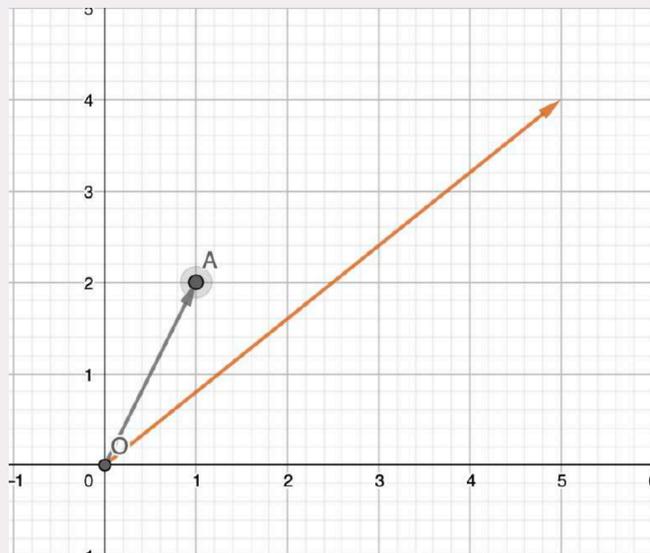
$$m_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$m_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$m_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Utilizzando il link di GeoGebra identifico gli **autovettori** a tentativi, cambiando il vettore di partenza (grigio in foto):

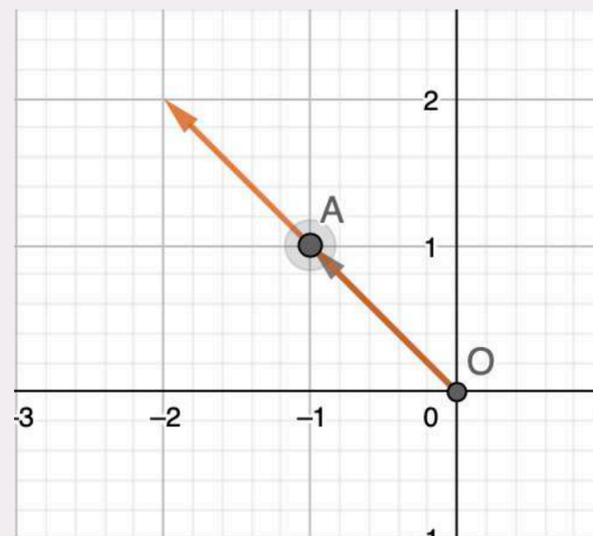
$$m_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

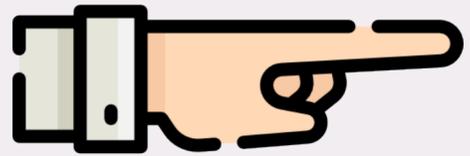
$$\lambda_1 = 3$$

Definiamo una **famiglia di autovettori**: tutti i vettori lungo quella direzione



$$|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2$$



PROVA TU!

GeoGebra

[Link GeoGebra: Autovalori e Autovettori 1](#)

$$m_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \longrightarrow |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 1 \longrightarrow |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{x}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$m_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \longrightarrow |\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 2 \longrightarrow |\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \end{cases}$$

● **Calcolo autovettori e autovalori: metodo ALGEBRICO**

Esiste un metodo algebrico per calcolare, dato un **operatore** \hat{O} , i suoi **autovettori** $|\lambda\rangle$ e **autovalori** λ

$$\hat{O} |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{O} |\lambda\rangle = \lambda \mathbb{1} |\lambda\rangle$$

$$\hat{O} |\lambda\rangle - \lambda \mathbb{1} |\lambda\rangle = 0$$

$$(\hat{O} - \lambda \mathbb{1}) |\lambda\rangle = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

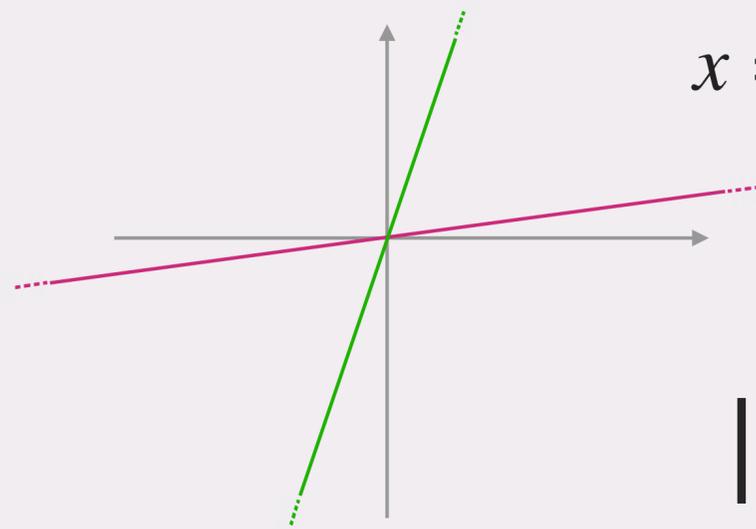
Bisogna risolvere questo sistema.

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Pensando a queste due equazioni come a delle rette (verde e rosa), il sistema ha due possibili soluzioni:

1 Hanno un solo punto in comune

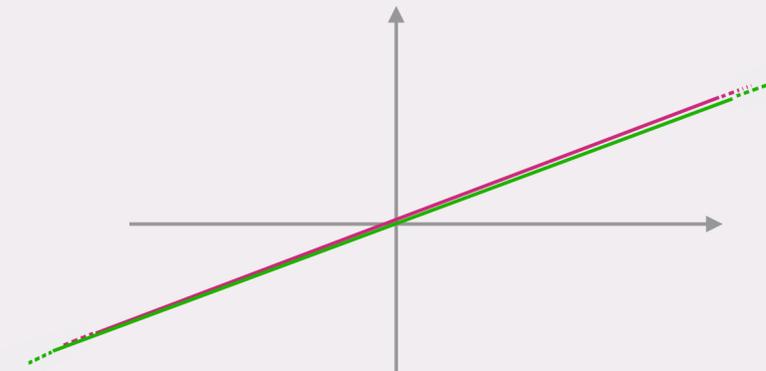


$$x = 0 ; y = 0$$

$$|\lambda\rangle = 0$$

Il vettore nullo non è considerato un autovettore!

2 Hanno infiniti punti in comune: sono la stessa retta



Equazioni linearmente
DIPENDENTI

$$\begin{cases} Ax + By = 0 \\ kAx + kB y = 0 \end{cases}$$

Il determinante di un sistema di questo tipo è sempre = 0

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ kA & kB \end{pmatrix}$$

$$A(kB) - B(kA) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

● Esempio numerico

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Per determinare gli autovalori
bisogna risolvere:

$$\det \left[\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & -2 \\ -2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(7 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0$$

$$(\lambda - 8)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 8 \rightarrow |\lambda_1\rangle$$

$$\lambda_2 = 3 \rightarrow |\lambda_2\rangle$$

Calcolo l'autovettore $|\lambda_1\rangle$ riferito all'autovalore $\lambda_1 = 8$

$$(\hat{O} - 8\mathbb{1}) |\lambda_1\rangle = 0$$
$$\begin{pmatrix} 7 - 8 & -2 \\ -2 & 4 - 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{cases} -x_1 - 2y_1 = 0 \\ -2x_1 - 4y_1 = 0 \end{cases} \rightarrow y_1 = -\frac{x_1}{2}$$

$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{x_1}{2} \end{pmatrix}$$

Calcolo l'autovettore $|\lambda_2\rangle$ riferito all'autovalore $\lambda_2 = 3$

$$(\hat{O} - 3\mathbb{1}) |\lambda_2\rangle = 0$$

$$\begin{pmatrix} 7-3 & -2 \\ -2 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{cases} 4x_2 - 2y_2 = 0 \\ -2x_2 + y_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y_2 = 2x_2$$

$$|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

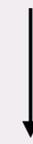
$$\hat{O} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 8$$

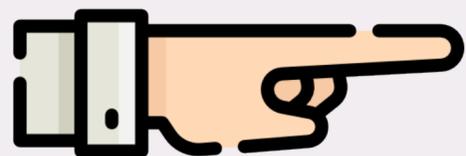


$$|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{x_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3$$



$$|\lambda_2\rangle = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$



PROVA TU!

Utilizzando GeoGebra, si ottengono gli stessi risultati?

GeoGebra

[Link GeoGebra: Calcolo autovalori](#)

Il proiettore



● Proiettare..

In meccanica quantistica abbiamo visto che l'operazione di proiezione ha un significato importante:

Stato del sistema quantistico

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

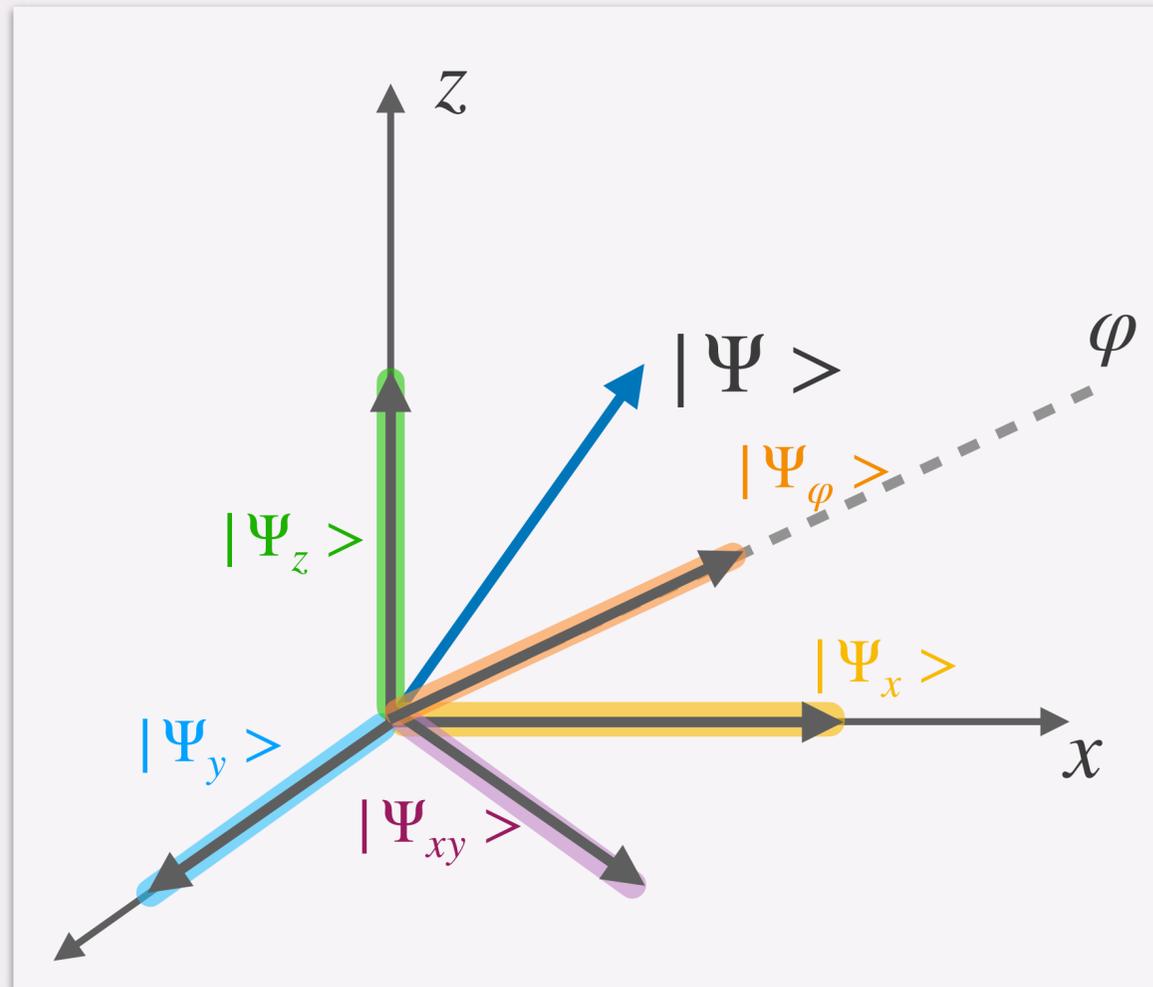
Chiamando $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$, $|e_3\rangle$, ... i vettori di lunghezza unitaria che identificano:

- gli assi dello spazio di Hilber associati al sistema
 - lo stato in cui si trova il sistema dopo la misura
- posso riscriverlo anche in questo modo:

$$|\Psi\rangle = \psi_1 |e_1\rangle + \psi_2 |e_2\rangle + \psi_3 |e_3\rangle + ..$$

ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , ... sono le **proiezioni** del vettore di stato sugli assi

Il modulo quadro di queste $|\psi_i|^2$ rappresenta la **PROBABILITÀ!**



Proietto sempre su un **SOTTOSPAZIO**

- **ASSI**

$|\Psi_x\rangle \rightarrow$ proiezione lungo l'asse x

$|\Psi_y\rangle \rightarrow$ proiezione lungo l'asse y

$|\Psi_z\rangle \rightarrow$ proiezione lungo l'asse z

- **PIANI**

$|\Psi_{xy}\rangle \rightarrow$ proiezione nel piano xy

$|\Psi_{yz}\rangle \rightarrow$ proiezione nel piano yz

$|\Psi_{zx}\rangle \rightarrow$ proiezione nel piano zx

- **ALTRE DIREZIONI**

$|\Psi_\varphi\rangle \rightarrow$ proiezione lungo la direzione generica φ

● L'operatore di proiezione: IL PROIETTORE..

L'operazione di proiezione **trasforma un vettore in un altro**



associamo a questa operazione un **operatore** che chiamiamo **proiettore** e indiciamo con \hat{P}_i

i rappresenta il **sottospazio** su cui questo operatore proietta



Un operatore è un proiettore se ha le seguenti caratteristiche:

● È IDEMPOTENTE: $\hat{P}_i = \hat{P}_i^2$

● È AUTOAGGIUNTO: $\langle \hat{P}_i a | b \rangle = \langle a | \hat{P}_i b \rangle$

...È IDEMPOTENTE

- Consideriamo un proiettore lungo una direzione qualsiasi i . Cosa succede se lo applico due volte ad un vettore generico $|\Psi\rangle$?

$$\hat{P}_i^2 |\Psi\rangle = \hat{P}_i(\hat{P}_i |\Psi\rangle)$$

↓ Vettore lungo la direzione i

$$\hat{P}_i |\Psi_i\rangle$$

Proiettando un vettore che giace già lungo i ancora lungo quella direzione si ottiene lo stesso vettore

$$|\Psi_i\rangle$$

- Quindi??

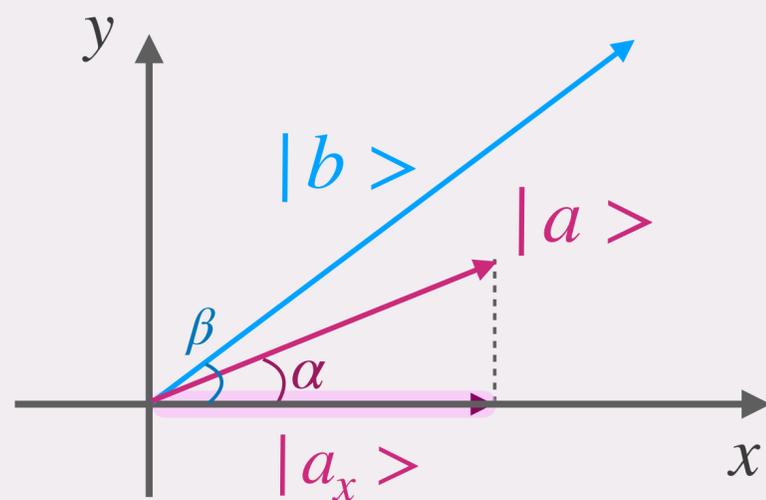
$$\underline{\hat{P}_i^2 |\Psi\rangle} = |\Psi_i\rangle = \underline{\hat{P}_i |\Psi\rangle} \longrightarrow \hat{P}_i = \hat{P}_i^2$$

...È AUTOAGGIUNTO

- Un operatore si dice autoaggiunto quando:

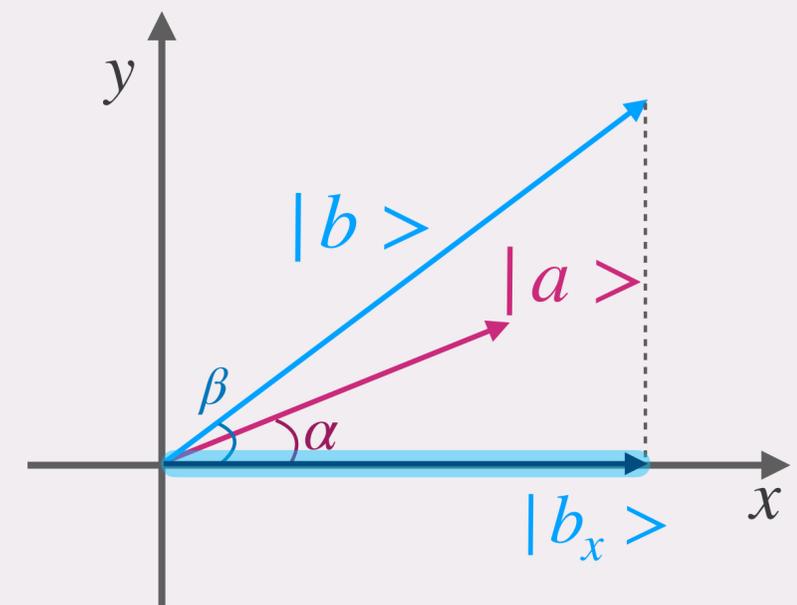
$$\langle \hat{O}a | b \rangle = \langle a | \hat{O}b \rangle$$

- Il proiettore ha questa proprietà?



$$\begin{aligned} \langle \hat{P}_x a | b \rangle &= \langle a | \hat{P}_x b \rangle \\ \downarrow |a_x\rangle & \qquad \downarrow |b_x\rangle \\ \langle a_x | b \rangle &= \langle a | b_x \rangle = \\ = a_x b \cos(\beta) &= ab_x \cos(\alpha) \\ \downarrow & \qquad \downarrow \\ a \cos(\alpha) b \cos(\beta) &= ab \cos(\beta) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

SI! ✓



Come riconoscere (in generale) che un **OPERATORE** è **AUTOAGGIUNTO**??

$$\langle \hat{O}a | b \rangle = \langle a | \hat{O}b \rangle$$

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a, d \longrightarrow valori reali

b, c \longrightarrow valori reali $b = c$ \longrightarrow Matrice simmetrica $\hat{O} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$

\longrightarrow valori complessi $b = c^*$ \longrightarrow $\hat{O} = \begin{pmatrix} a & c^* \\ c & d \end{pmatrix}$

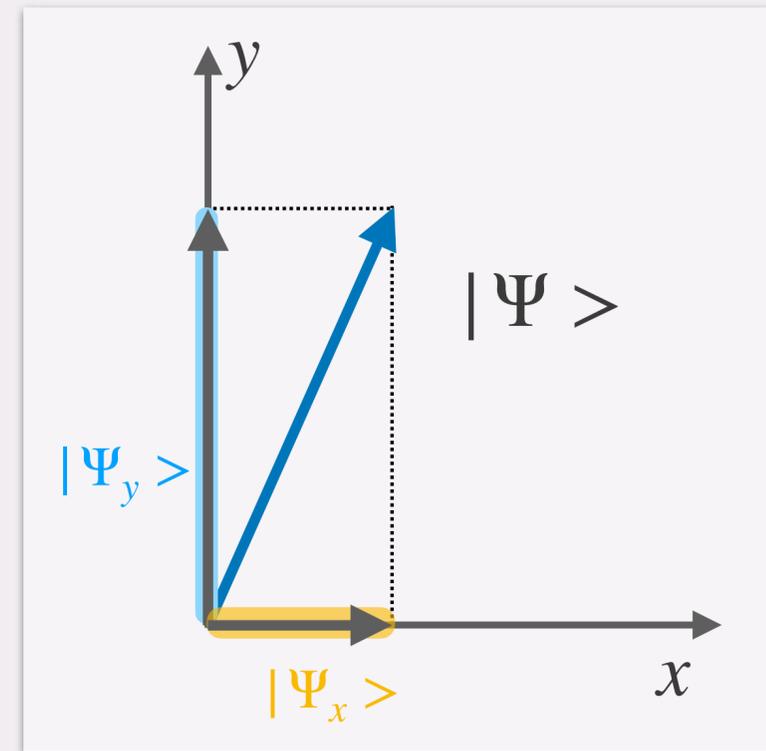
● Proiettore

$$|\Psi\rangle = |\Psi_x\rangle + |\Psi_y\rangle$$

\hat{P}_x è il proiettore che proietta lungo x $\longrightarrow \hat{P}_x |\Psi\rangle = |\Psi_x\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{P}_x |\Psi\rangle &= |\Psi_x\rangle \\ &= \underbrace{\psi_x}_{\text{Lunghezza della proiezione}} |e_1\rangle = \underbrace{\langle e_1 | \Psi \rangle}_{\text{Versore asse } x} |e_1\rangle = |e_1\rangle \langle e_1 | \Psi \rangle \end{aligned}$$

$$\hat{P}_x = |e_1\rangle \langle e_1|$$



\hat{P}_y è il proiettore che proietta lungo y $\longrightarrow \hat{P}_y |\Psi\rangle = |\Psi_y\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{P}_y |\Psi\rangle &= |\Psi_y\rangle \\ &= \underbrace{\psi_y}_{\text{Lunghezza della proiezione}} |e_2\rangle = \underbrace{\langle e_2 | \Psi \rangle}_{\text{Versore asse } y} |e_2\rangle = |e_2\rangle \langle e_2 | \Psi \rangle \end{aligned}$$

$$\hat{P}_y = |e_2\rangle \langle e_2|$$

● Proiettore: forma matriciale

$$\hat{P}_i = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

\hat{P}_x

$$\hat{P}_x |\Psi\rangle = |\Psi_x\rangle \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \psi_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a \cdot \psi_x + b \cdot \psi_y = \psi_x & \longrightarrow a = 1, b = 0 \\ c \cdot \psi_x + d \cdot \psi_y = 0 & \longrightarrow c = 0, d = 0 \end{cases}$$

$$\hat{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\hat{P}_y

$$\hat{P}_y |\Psi\rangle = |\Psi_y\rangle \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a \cdot \psi_x + b \cdot \psi_y = 0 & \longrightarrow a = 0, b = 0 \\ c \cdot \psi_x + d \cdot \psi_y = \psi_y & \longrightarrow c = 0, d = 1 \end{cases}$$

$$\hat{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

● Proiettore: RELAZIONE DI COMPLETEZZA

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\Psi_x\rangle + |\Psi_y\rangle = \\ &= \hat{P}_x |\Psi\rangle + \hat{P}_y |\Psi\rangle = \\ &= |e_1\rangle \langle e_1| |\Psi\rangle + |e_2\rangle \langle e_2| |\Psi\rangle = \\ &= \left(|e_1\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2| \right) |\Psi\rangle \end{aligned}$$

$$|e_1\rangle \langle e_1| + |e_2\rangle \langle e_2| = \mathbb{1}$$

Relazione di completezza
Risoluzione dell'identità

$$\hat{P}_x + \hat{P}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Questa relazione è valida in generale, anche quando abbiamo n dimensioni

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i |e_i\rangle$$

$$\hat{P}_i = |e_i\rangle \langle e_i|$$

$$\sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| = \mathbb{1}$$

AUTOVETTORI e AUTOVALORI
del PROIETTORE



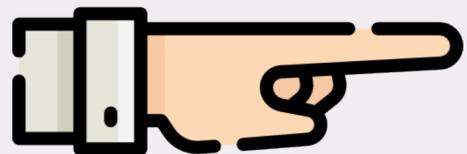
- 1 Considero il proiettore \hat{P}_1 che proietta lungo l'asse che chiamo 1 e che è individuato dal versore $|e_1\rangle$

$$\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2 Considero il proiettore \hat{P}_2 che proietta lungo l'asse che chiamo 2 e che è individuato dal versore $|e_2\rangle$

$$\hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|e_1\rangle \perp |e_2\rangle \longrightarrow \hat{P}_1 \perp \hat{P}_2$$



PROVA TU!

Utilizzando il metodo algebrico o quello grafico (guardando il link di GeoGebra), identifica gli **autovettori** e gli **autovalori** dei due proiettori.

GeoGebra

[Link GeoGebra: Autovettori e autovalori dei proiettori](#)

- Gli **autovettori dei proiettori** sono quei vettori che giacciono:
 - lungo la stessa direzione di proiezione
 - lungo la direzione ortogonale a quella di proiezione
- Gli **autovalori dei proiettori** sono due:
 - $\lambda = 1$: riferito all'autovettore che ha la stessa direzione di quella di proiezione
 - $\lambda = 0$: riferito all'autovettore che ha direzione ortogonale a quella di proiezione

$$\textcircled{1} \hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{P}_1 |e_1\rangle = \mathbf{1} |e_1\rangle \\ \hat{P}_1 |e_2\rangle = \mathbf{0} |e_2\rangle \end{cases} \longleftarrow \text{AUTOVETTORI}$$

↑
AUTOVALORI

$$\textcircled{2} \hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{P}_2 |e_2\rangle = \mathbf{1} |e_2\rangle \\ \hat{P}_2 |e_1\rangle = \mathbf{0} |e_1\rangle \end{cases} \longleftarrow \text{AUTOVETTORI}$$

↑
AUTOVALORI

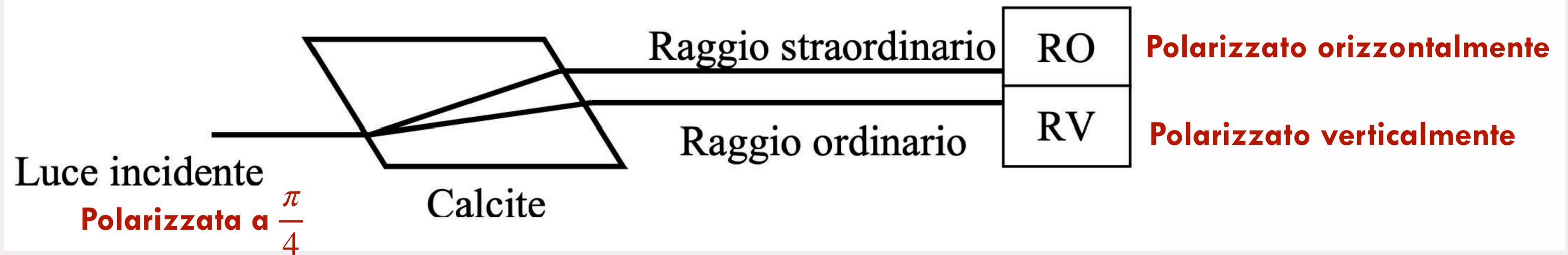
La **CALCITE** e il **PROIETTORE**



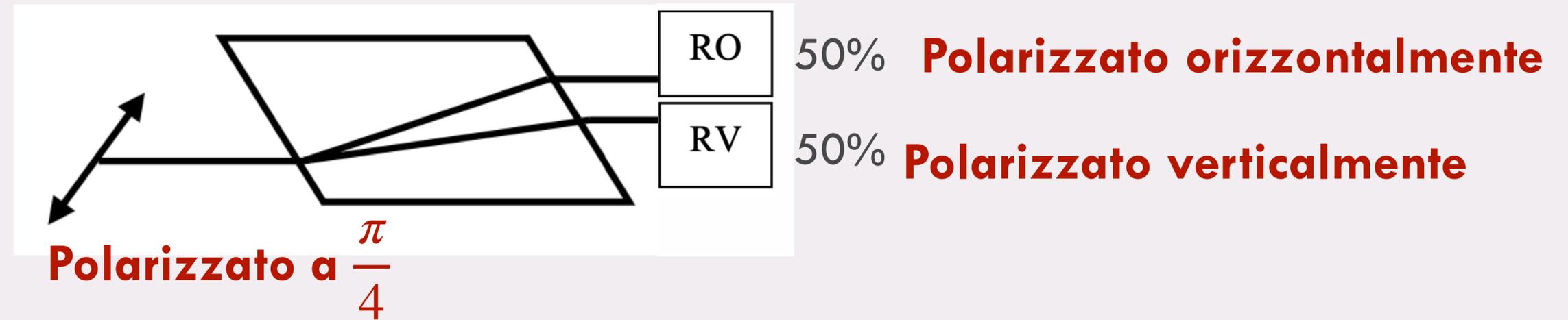
Proviamo ad **utilizzare il concetto di proiettore** nello studio di un fotone che attraversa la calcite.



La calcite è un cristallo **birifrangente**, ossia in grado di scomposizione di un raggio di luce in due raggi.



Utilizzando un **singolo fotone**:



Abbiamo due **possibili risultati indipendenti**:

1. Polarizzazione orizzontale
2. Polarizzazione verticale

↓
Due **assi ortogonali**

↓
Individuati da **due versori** che rappresentano gli **stati possibili** in cui si può trovare il fotone dopo aver effettuato la misura

$$\begin{array}{c} |o\rangle \\ |v\rangle \end{array}$$

$\langle o|v\rangle = 0$

→ Lo stato in cui si trova il fotone prima della misura è:

$$|\gamma\rangle = \gamma_o |o\rangle + \gamma_v |v\rangle$$

- Possiamo definire i **due proiettori** che proiettano lungo gli assi:

$$\hat{P}_o \perp \hat{P}_v \left\{ \begin{array}{l} \hat{P}_o : \text{proiettore lungo l'asse definito dal versore } |o\rangle \\ \hat{P}_v : \text{proiettore lungo l'asse definito dal versore } |v\rangle \end{array} \right.$$

- Studiando gli **autovettori** e gli **autovalori** di questi proiettori troviamo che:

$$\textcircled{1} \hat{P}_o |o\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{AUTOVALORE}}}{1} |o\rangle \leftarrow \text{AUTOVETTORE}$$

$$\textcircled{2} \hat{P}_v |v\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{AUTOVALORE}}}{1} |v\rangle \leftarrow \text{AUTOVETTORE}$$

I **possibili stati** in cui il sistema può trovarsi dopo la misura sono gli **autovettori** del proiettore

**Formalizzazione matematica del
processo di misura**



STATI POSSIBILI
del sistema dopo la
misura



Autovettori
dei **PROIETTORI**
che proiettano
lungo gli assi

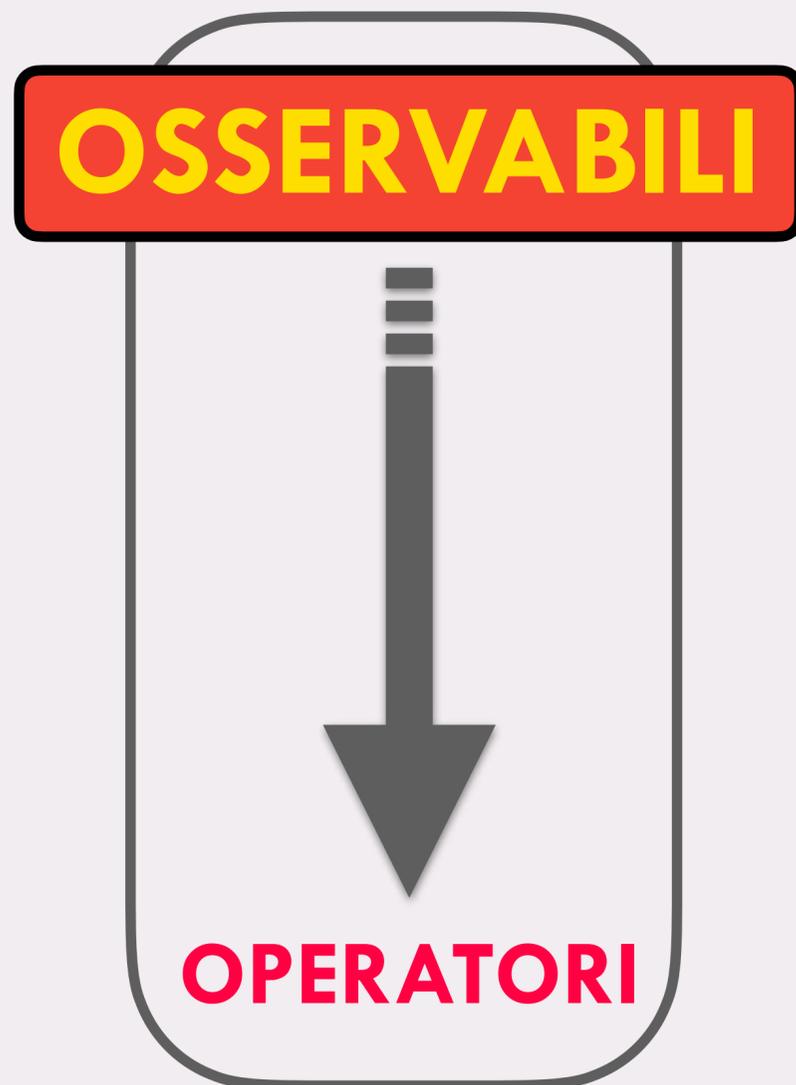


RISULTATI POSSIBILI
della misura



Valori numerici **REALI**

Dato che la teoria della meccanica quantistica è una teoria lineare, possiamo pensare di **scrivere l'operatore associato alle osservabili come una combinazione lineare di proiettori** dove i coefficienti sono numeri reali che rappresentano i risultati della misura!



$$\hat{O} = c_1 \hat{P}_1 + c_2 \hat{P}_2 + c_3 \hat{P}_3 + \dots$$

RISULTATI POSSIBILI
della misura

PROIETTORI
ortogonali

Che proiettano sugli assi definiti dagli
STATI POSSIBILI
dopo la misura

$|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots$

COMBINAZIONI LINEARI di **PROIETTORI**

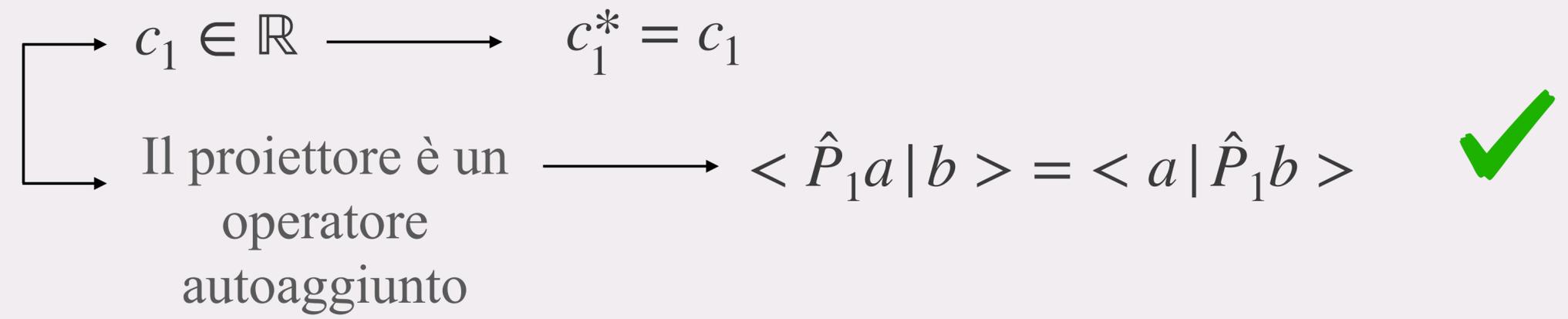


1 $\hat{O} = c_1 \hat{P}_1$

$c_1 \in \mathbb{R}$

È autoaggiunto?

- Dimostrazione:
 $\langle \hat{O}a | b \rangle = \langle a | \hat{O}b \rangle$
 $\langle (c_1 \hat{P}_1) a | b \rangle = \langle a | (c_1 \hat{P}_1) b \rangle$
 $c_1^* \langle \hat{P}_1 a | b \rangle = c_1 \langle a | \hat{P}_1 b \rangle$



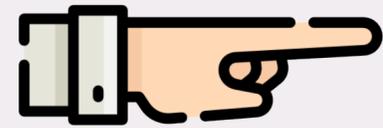
- Possiamo anche vederlo graficamente andando a scrivere l'operatore in forma matriciale:

$\hat{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Uguali

Reali

Quali sono i suoi autovalori e autovettori?



PROVA TU!

GeoGebra

[Link GeoGebra: Combinazione lineare di proiettori 1](#)

<input type="radio"/>	o = Intersezione di asseX, asseY
<input checked="" type="radio"/>	$O = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
<input type="radio"/>	Punto A
<input type="radio"/>	a = Vettore(o, A)
<input type="radio"/>	b = (O a)

→ Prova a cambiare il valore di $c_1 = 3$ e vedere cosa succede!

- Vediamo che gli **autovettori** sono quelli del proiettore e l'**autovalore** è il coefficiente c_1

$$(c_1 \hat{P}_1) |e_1\rangle = c_1 \hat{P}_1 |e_1\rangle = \boxed{c_1} |e_1\rangle$$

↑ AUTOVETTORE
↑ AUTOVALORE

$$2 \quad \hat{O} = c_1 \hat{P}_1 + c_2 \hat{P}_2$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

È autoaggiunto?

• Dimostrazione: $\langle \hat{O}a | b \rangle = \langle a | \hat{O}b \rangle$

$$\langle (c_1 \hat{P}_1 + c_2 \hat{P}_2) a | b \rangle = \langle a | (c_1 \hat{P}_1 + c_2 \hat{P}_2) b \rangle$$

$$\langle (c_1 \hat{P}_1) a | b \rangle + \langle (c_2 \hat{P}_2) a | b \rangle = \langle a | (c_1 \hat{P}_1) b \rangle + \langle a | (c_2 \hat{P}_2) b \rangle$$

$$c_1^* \langle \hat{P}_1 a | b \rangle + c_2^* \langle \hat{P}_2 a | b \rangle = c_1 \langle \hat{P}_1 a | b \rangle + c_2 \langle \hat{P}_2 a | b \rangle$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow c_1^* = c_1, c_2^* = c_2$

Il proiettore è un operatore autoaggiunto

$$\begin{cases} \langle \hat{P}_1 a | b \rangle = \langle a | \hat{P}_1 b \rangle \\ \langle \hat{P}_2 a | b \rangle = \langle a | \hat{P}_2 b \rangle \end{cases}$$



- Possiamo anche vederlo graficamente andando a scrivere l'operatore in forma matriciale:

$$\hat{O} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

Uguali
**MATRICE
DIAGONALE**
Reali

Quali sono i suoi autovalori e autovettori?



PROVA TU!

GeoGebra

[Link GeoGebra: Combinazione lineari di proiettori 2](#)

<input type="radio"/>	o = Intersezione di asseX, asseY
<input checked="" type="radio"/>	$O = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
<input type="radio"/>	Punto A
<input type="radio"/>	a = Vettore(o, A)
<input type="radio"/>	b = (O a)

→ Prova a cambiare i valori di $c_1 = 5$ e $c_2 = 4$ per vedere cosa succede!

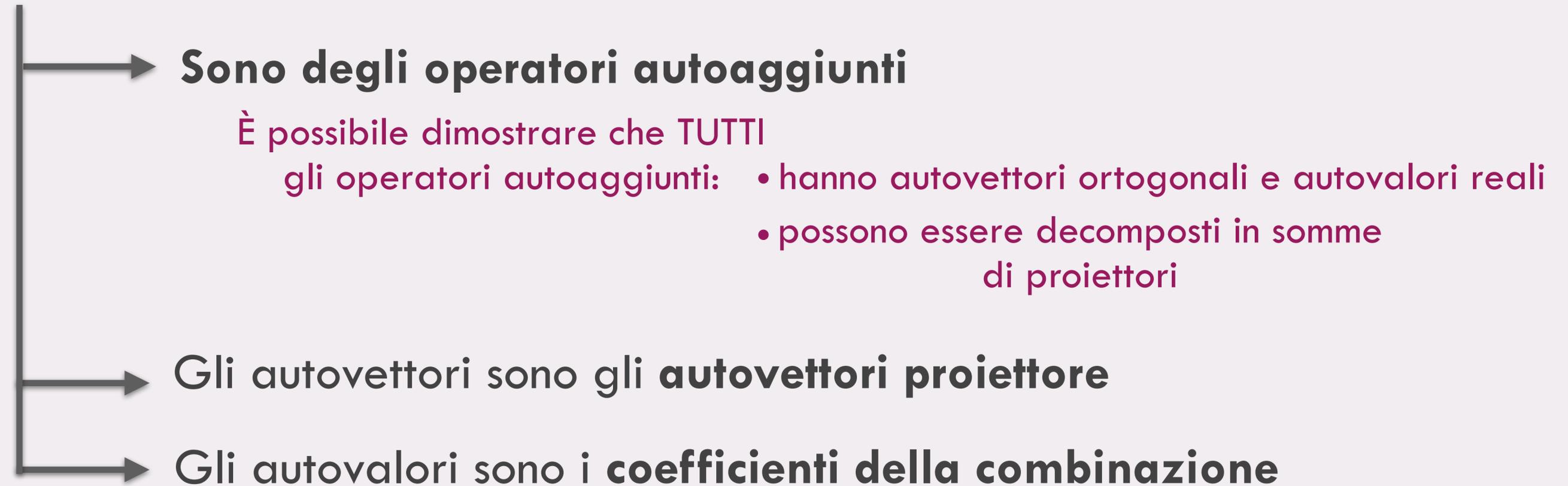
Vediamo che gli **autovettori** sono quelli dei due proiettori che compongono la combinazione lineare e gli **autovalori** sono i due coefficienti c_1 e c_2

$$\begin{aligned} \bullet (c_1 \hat{P}_1 + c_2 \hat{P}_2) |e_1\rangle &= \\ &= c_1 \hat{P}_1 |e_1\rangle + c_2 \hat{P}_2 |e_1\rangle = c_1 (1 |e_1\rangle) + c_2 (0 |e_1\rangle) = \\ &= c_1 |e_1\rangle \leftarrow \text{AUTOVETTORE} \\ &\quad \uparrow \text{AUTOVALORE} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (c_1 \hat{P}_1 + c_2 \hat{P}_2) |e_2\rangle &= \\ &= c_1 \hat{P}_1 |e_2\rangle + c_2 \hat{P}_2 |e_2\rangle = c_1 (0 |e_2\rangle) + c_2 (1 |e_2\rangle) = \\ &= c_2 |e_2\rangle \leftarrow \text{AUTOVETTORE} \\ &\quad \uparrow \text{AUTOVALORE} \end{aligned}$$

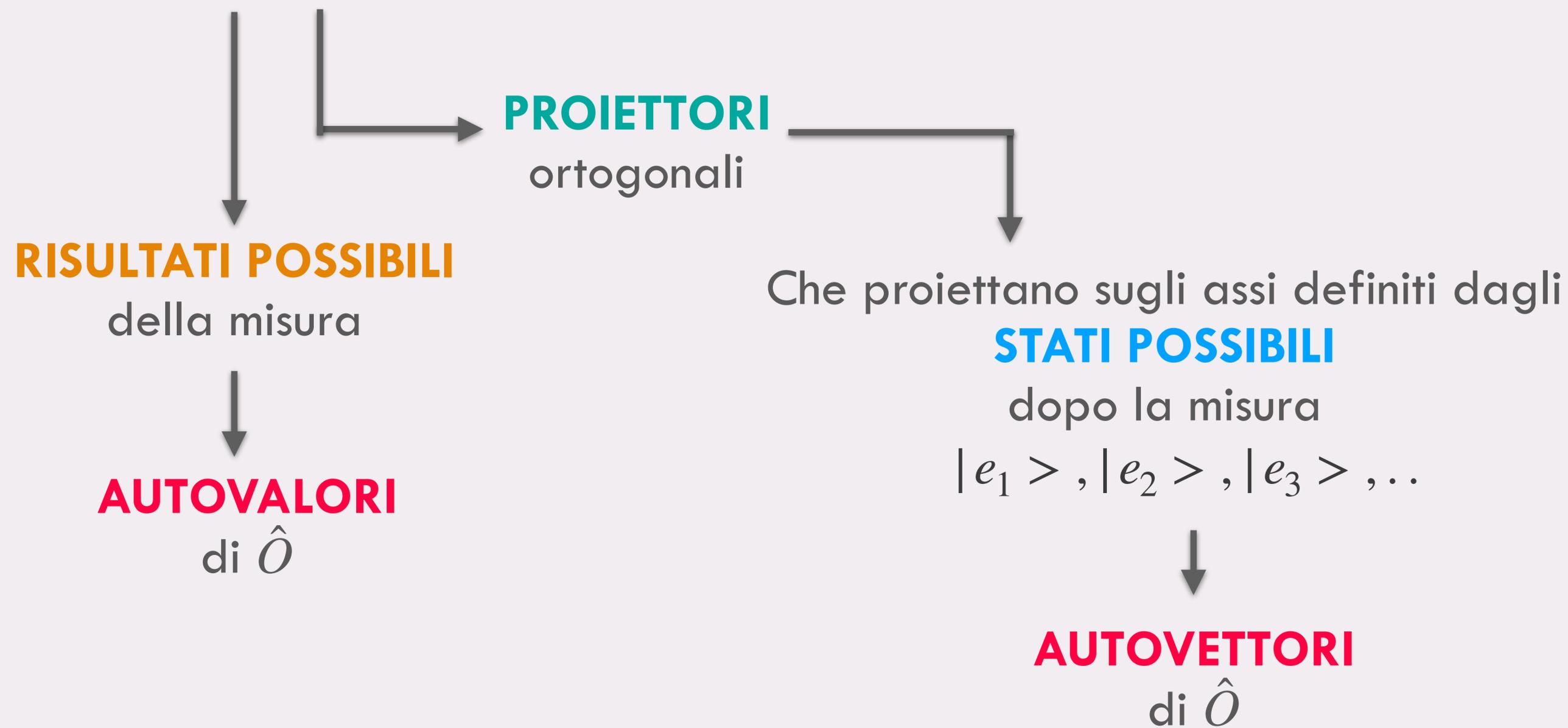
$$\begin{aligned} |e_1\rangle &\perp |e_2\rangle \\ c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

● Caratteristiche delle combinazioni lineari di proiettori a coefficienti reali



- I **possibili stati** in cui il sistema può trovarsi dopo la misura sono gli **autovettori** dell'operatore
- I **possibili risultati** della misura sono gli **autovalori** dell'operatore

$$\hat{O} = c_1 \hat{P}_1 + c_2 \hat{P}_2 + c_3 \hat{P}_3 + \dots$$



● Esempio: OPERATORE ENERGIA

Consideriamo un elettrone in un atomo e supponiamo che possa trovarsi solamente su uno dei due livelli energetici, caratterizzati da due diversi valori di energia:

$$\text{Livello eccitato} \quad : E_2 \longrightarrow |e_2\rangle \longrightarrow \hat{P}_2 = |e_2\rangle\langle e_2|$$

$$\text{Livello fondamentale} : E_1 \longrightarrow |e_1\rangle \longrightarrow \hat{P}_1 = |e_1\rangle\langle e_1|$$

$$\langle e_2 | e_1 \rangle = 0$$

$$\text{Stato dell'elettrone: } |\psi\rangle = \psi_1 |e_1\rangle + \psi_2 |e_2\rangle$$

$$p_1 = |\psi_1|^2 = |\langle e_1 | \psi \rangle|^2$$

probabilità di ottenere
come risultato E_1

$$p_2 = |\psi_2|^2 = |\langle e_2 | \psi \rangle|^2$$

probabilità di ottenere
come risultato E_2

$$E_1 = -1 \text{ eV} \longrightarrow p_1 = \frac{3}{4}$$

$$E_2 = -9 \text{ eV} \longrightarrow p_2 = \frac{1}{4}$$

● OPERATORE ENERGIA: che cosa mi aspetto?

$$\hat{H} = c_1 \hat{P}_1 + c_2 \hat{P}_2$$

RISULTATI POSSIBILI
della misura

$$E_1 \quad E_2$$

PROIETTORI

ortogonali che proiettano
lungo i due assi associati
alle due possibilità

$$\hat{H} = E_1 \hat{P}_1 + E_2 \hat{P}_2$$

● OPERATORE ENERGIA: calcolo del valor medio

Calcoliamo il **valor medio** dell'energia

$$\langle E \rangle = p_1 E_1 + p_2 E_2 \longrightarrow = \frac{3}{4} E_1 + \frac{1}{4} E_2 = -3$$



$$= |\langle e_1 | \psi \rangle|^2 E_1 + |\langle e_2 | \psi \rangle|^2 E_2 =$$

$$= (\langle e_1 | \psi \rangle)^* (\langle e_1 | \psi \rangle) E_1 + (\langle e_2 | \psi \rangle)^* (\langle e_2 | \psi \rangle) E_2 =$$

$$= \langle \psi | e_1 \rangle \langle e_1 | \psi \rangle E_1 + \langle \psi | e_2 \rangle \langle e_2 | \psi \rangle E_2 =$$

$$= \langle \psi | (E_1 \hat{P}_1 + E_2 \hat{P}_2) | \psi \rangle$$



$$\hat{H} = E_1 \hat{P}_1 + E_2 \hat{P}_2$$

OPERATORE ENERGIA

● OPERATORE ENERGIA

Studiamo l'**operatore energia**:

● Forma matriciale: $\hat{H} = E_1 \hat{P}_1 + E_2 \hat{P}_2 \rightarrow \hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

↓

$$\hat{H} = E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

● Autovalori e autovettori:



[Link GeoGebra: Autovalori Energia](#)

1 $\hat{H} |e_1\rangle = 1 |e_1\rangle = E_1 |e_1\rangle$

AUTOVALORE AUTOVETTORE

2 $\hat{H} |e_2\rangle = 9 |e_2\rangle = E_2 |e_2\rangle$

AUTOVALORE AUTOVETTORE

I TRE POSTULATI della
meccanica quantistica



● I postulato

Ad ogni sistema fisico in meccanica quantistica viene associato uno **spazio di Hilbert**.

Le dimensioni di tale spazio dipendono dai possibili risultati della misura.

Lo **stato del sistema** è rappresentato da un **vettore unitario** in questo spazio.

● II postulato

Quando effettuo una misura sullo stato, esso **collassa** in un stato diverso che corrisponde a quello che rappresenta il risultato della misura.

- Lo **stato del sistema** è rappresentato da un **vettore lungo 1** perché il modulo quadro delle componenti rappresenta la **PROBAILITÀ** di ottenere il risultato corrispondente all'asse

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + \dots = 1$$

- Se chiamo $|e_i\rangle$ i stati base (anch'essi lunghi 1) che identificano gli assi corrispondenti alle diverse possibilità e che rappresentano gli stati possibili dopo la misura, allora posso scrivere lo stato in questo modo:

$$|\Psi\rangle = \psi_1 |e_1\rangle + \psi_2 |e_2\rangle + \psi_3 |e_3\rangle + \dots$$

$$|\psi_i|^2 = |\langle e_i | \Psi \rangle|^2 : \text{PROBAILITÀ}$$

STATI POSSIBILI
dopo la misura

Conoscere lo stato ci permette di conoscere solo la **probabilità** (e viceversa conoscendo la probabilità posso definire lo stato) ma **non mi dice nulla su quali sono i possibili risultati della misura.**

III postulato

A ciascuna osservabile in meccanica quantistica viene associato un **operatore autoaggiunto** \hat{O} .

Lo spettro di tale operatore, ossia l'insieme dei suoi **autovalori**, rappresenta i possibili **risultati** di misura.

Inoltre, i suoi **autovettori**, chiamati anche **autostati**, rappresentano i **possibili stati** in cui il sistema può trovarsi dopo la misura.

Un'operatore autoaggiunto può essere sempre scritto come combinazione lineare di proiettori a coefficienti reali.

$$\hat{O} = c_1 \hat{P}_1 + c_2 \hat{P}_2 + c_3 \hat{P}_3 + \dots$$

PROIETTORI
ortogonali

SPETTRO
di \hat{O}

RISULTATI POSSIBILI
della misura

AUTOVALORI
di \hat{O}

In forma matriciale:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

MATRICE
DIAGONALE

Come riconoscere (in generale) che un **OPERATORE è AUTOAGGIUNTO??**

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

• Valori sulla diagonale principale \longrightarrow Numeri reali

• Valori simmetrici

b d

c g

f h

\longrightarrow numeri reali

$$b = c$$

$$c = g$$

$$f = h$$

\longrightarrow Matrice simmetrica

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ d & e & h \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

\longrightarrow numeri complessi

$$b = c^*$$

$$c = g^*$$

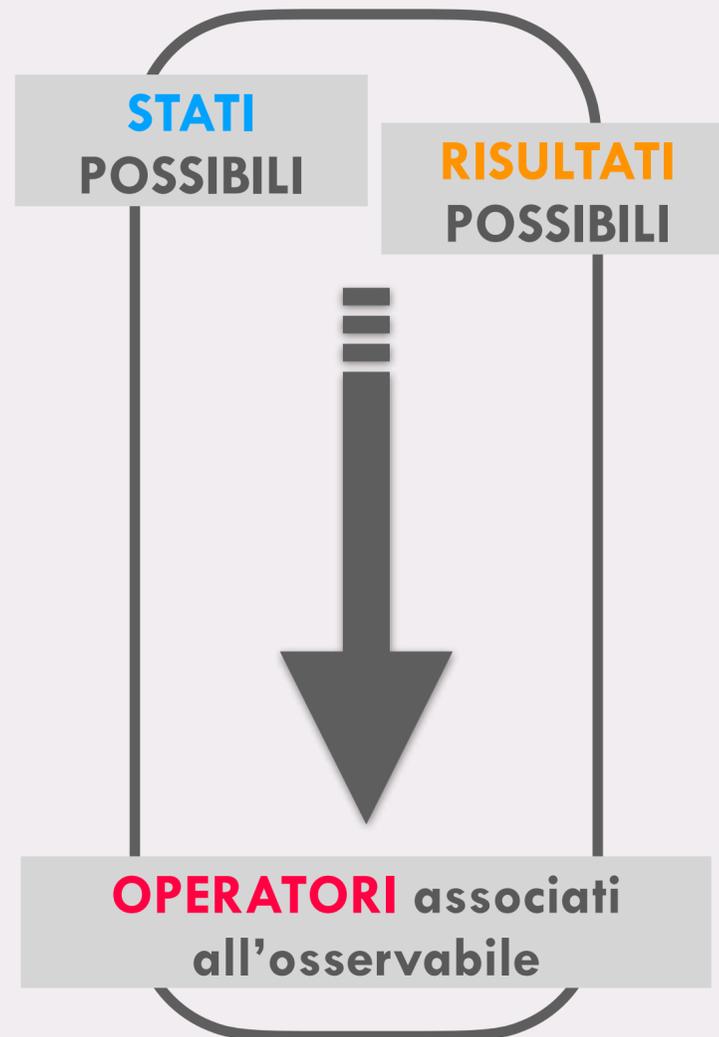
$$f = h^*$$

\longrightarrow

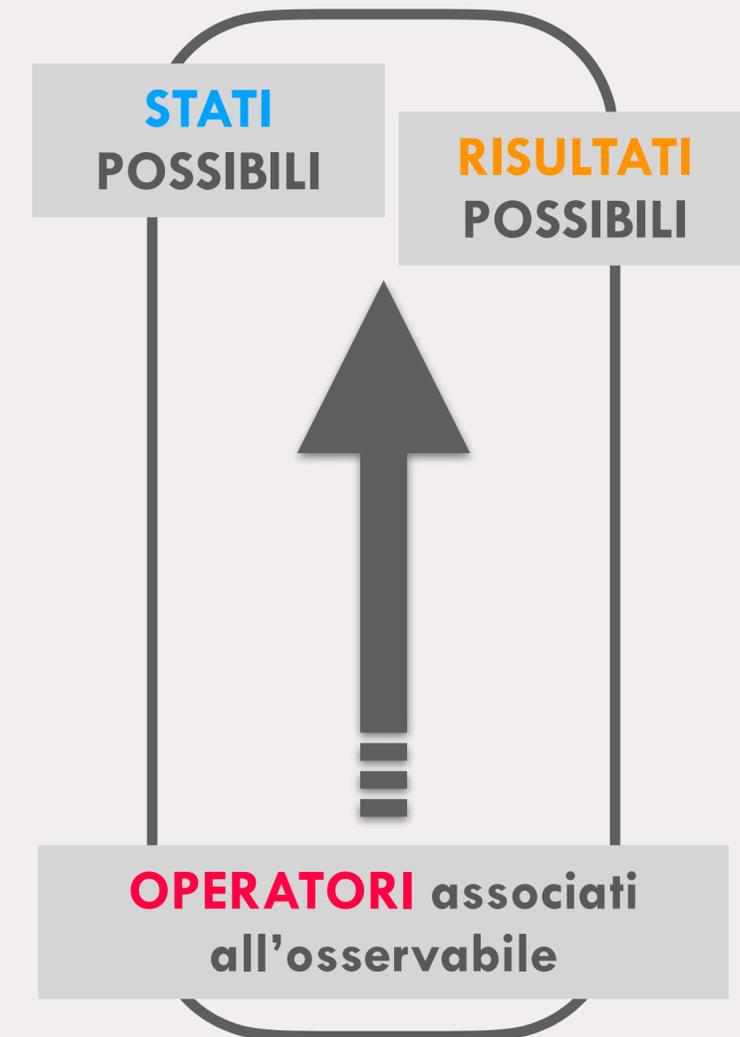
$$\hat{O} = \begin{pmatrix} a & d^* & g^* \\ d & e & h^* \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Tutto quello che abbiamo detto fino ad ora ci permette di:

determinare gli operatori associati alle osservabili conoscendo i risultati che si ottengono effettuando una misura



determinare i risultati e gli stati avendo l'operatore scritto in forma matriciale



● Esempio: HAMILTONIANA D'INTERAZIONE

Consideriamo un elettrone in un atomo e supponiamo che possa trovarsi solamente su uno dei due livelli energetici, caratterizzati da due diversi valori di energia:

$$\text{Livello eccitato} \quad : E_2 \longrightarrow |e_2\rangle \longrightarrow \hat{P}_2 = |e_2\rangle\langle e_2|$$

$$\text{Livello fondamentale} : E_1 \longrightarrow |e_1\rangle \longrightarrow \hat{P}_1 = |e_1\rangle\langle e_1|$$

$$\langle e_2 | e_1 \rangle = 0$$



Nell'esercizio precedente abbiamo determinato:

- Stato dell'elettrone: $|\psi\rangle = \psi_1 |e_1\rangle + \psi_2 |e_2\rangle$

- Operatore energia: $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} \hat{H}|e_1\rangle &= E_1 |e_1\rangle \\ \hat{H}|e_2\rangle &= E_2 |e_2\rangle \end{aligned}$

HAMILTONIANA D'INTERAZIONE: irraggio l'atomo con della radiazione

Frequenza della radiazione: ω

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu = \hbar\omega$$

$$\hat{H}_{int} |e_1\rangle \rightarrow |e_2\rangle$$

$$\hat{H}_{int} |e_2\rangle \rightarrow |e_1\rangle$$

$$\bullet \hat{H}_{int} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \nearrow \hat{H}_{int} |e_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b |e_2\rangle \\ \searrow \hat{H}_{int} |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a |e_1\rangle \end{matrix}$$

$$\bullet \hat{H}_{int} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{H}_{int} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^* \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

**Deve essere
autoaggiunto**

HAMILTONIANA D'INTERAZIONE: risultati del calcolo dell'energia

Operatore totale:

$$\hat{H}_{TOT} = \hat{H} + \hat{H}_{int} = \begin{pmatrix} E_1 & \gamma^* \\ \gamma & E_2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo i risultati!

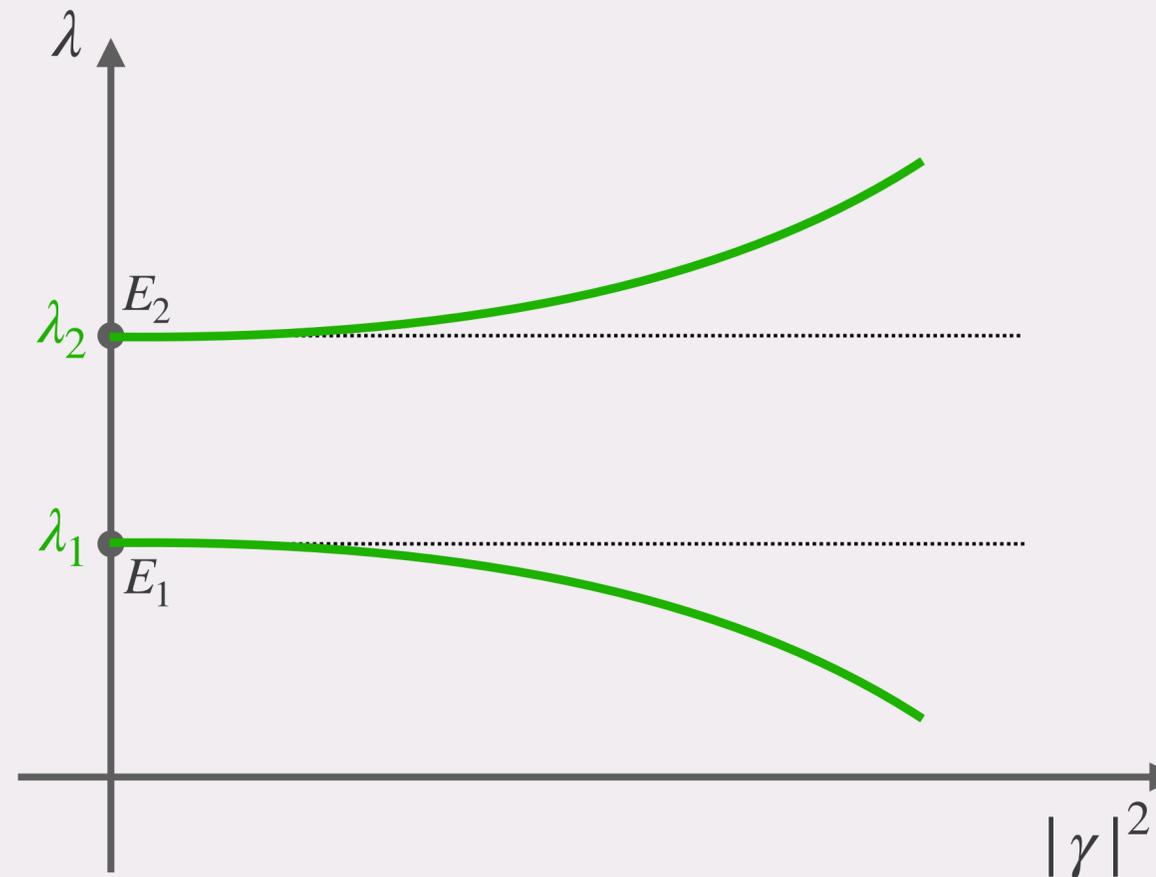
$$\det(\hat{H}_{int} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \longrightarrow \det \begin{pmatrix} E_1 - \lambda & \gamma^* \\ \gamma & E_2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

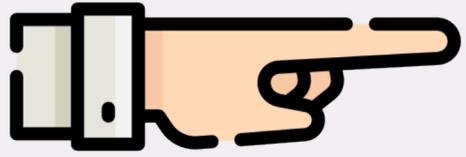
$$(E_1 - \lambda)(E_2 - \lambda) - \gamma^* \gamma = 0$$

$$\lambda^2 - (E_1 + E_2)\lambda + (E_1 E_2 - \gamma^* \gamma) = 0$$

$$\lambda^2 - (E_1 + E_2)\lambda + (E_1 E_2 - |\gamma|^2) = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{(E_1 + E_2) \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|\gamma|^2}}{2}$$





PROVA TU!

3. Si ottengano autovalori e autovettori dell'Hamiltoniana in \mathbb{C}^2

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega^* & -\Delta \end{pmatrix},$$

precisando quali dimensioni devono avere le costanti Δ e Ω . Si studi la dipendenza dell'energia dei livelli in funzione di Δ per i casi $\Omega \neq 0$ e $\Omega = 0$ commentando il risultato.

Tuttavia non abbiamo ancora capito in che modo definire gli operatori associati alle osservabili senza effettuare la misura e quindi conoscere i risultati.



La teoria che stiamo costruendo deve darci un metodo per farlo!



OPERATORI associati
all'osservabile

Dalla meccanica classica..

.. alla meccanica quantistica

In meccanica classica le grandezze possono essere scritte in funzione della posizione e della quantità di moto:

Il mondo intorno a noi, anche se composto da particelle quantistiche, si manifesta in modo classico e possiamo pensare alla meccanica classica come ad un limite della meccanica quantistica.

● Energia

$$E = E_c + U(x)$$

$E_c = \frac{p^2}{2m}$

$U_e \propto x^2$
 $U_c \propto \frac{1}{r}$

● Momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Possiamo quindi credere che anche in meccanica quantistica siano la posizione e quantità di moto la chiave per poter costruire gli operatori associati alle altre osservabili.

\hat{x} → **Operatore posizione**

\hat{p} → **Operatore quantità di moto**

NON è il proiettore

\hat{P}

Vettore con **INFINITE**
COMPONENTI



Se vogliamo determinare la posizione di un quanto, ci troviamo a dover considerare **INFINITI** risultati $x \in (-\infty; +\infty)$



INFINITE possibilità



INFINITI assi



Spazio di
Hilbert **infinito**
dimensionale



Vettori con
componenti
infinite



Come possiamo **visualizzare**
un vettore di questi tipo?

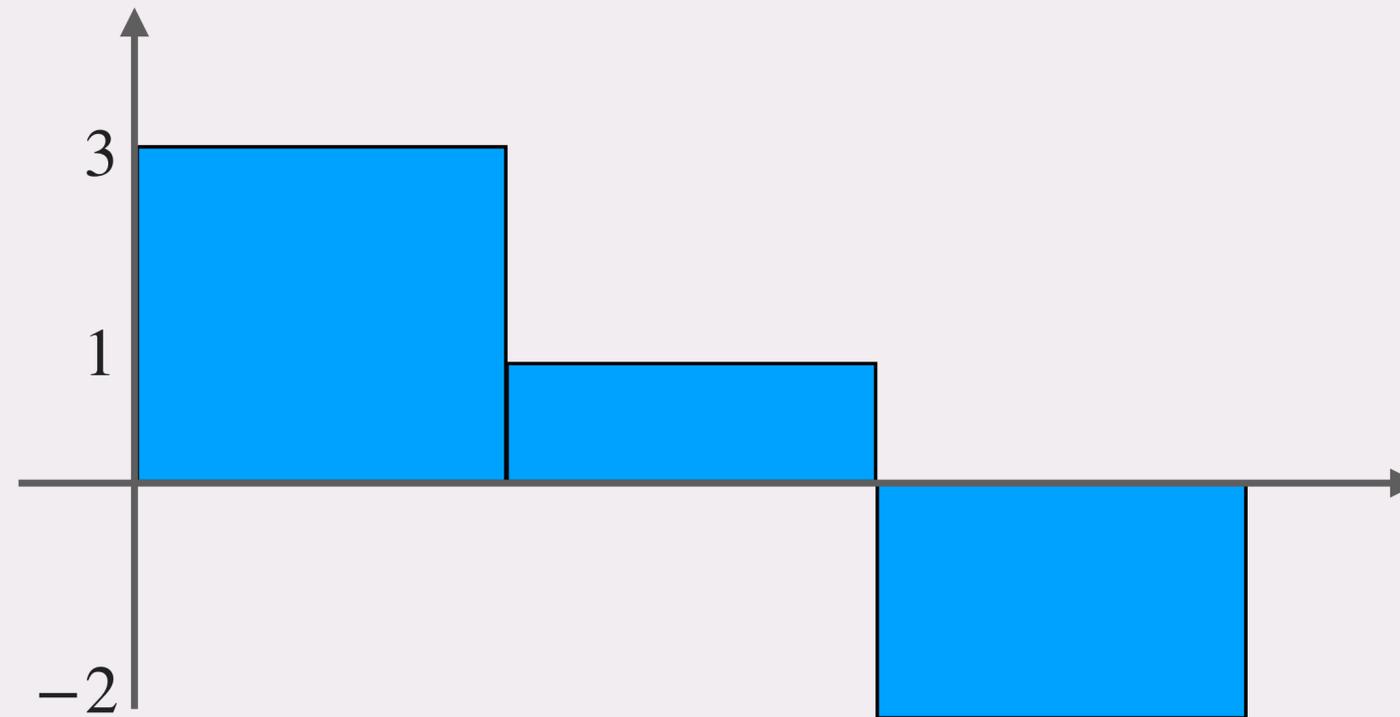
Proviamo a **rappresentare** i vettori in un **istogramma** di questo tipo

Valore numerico



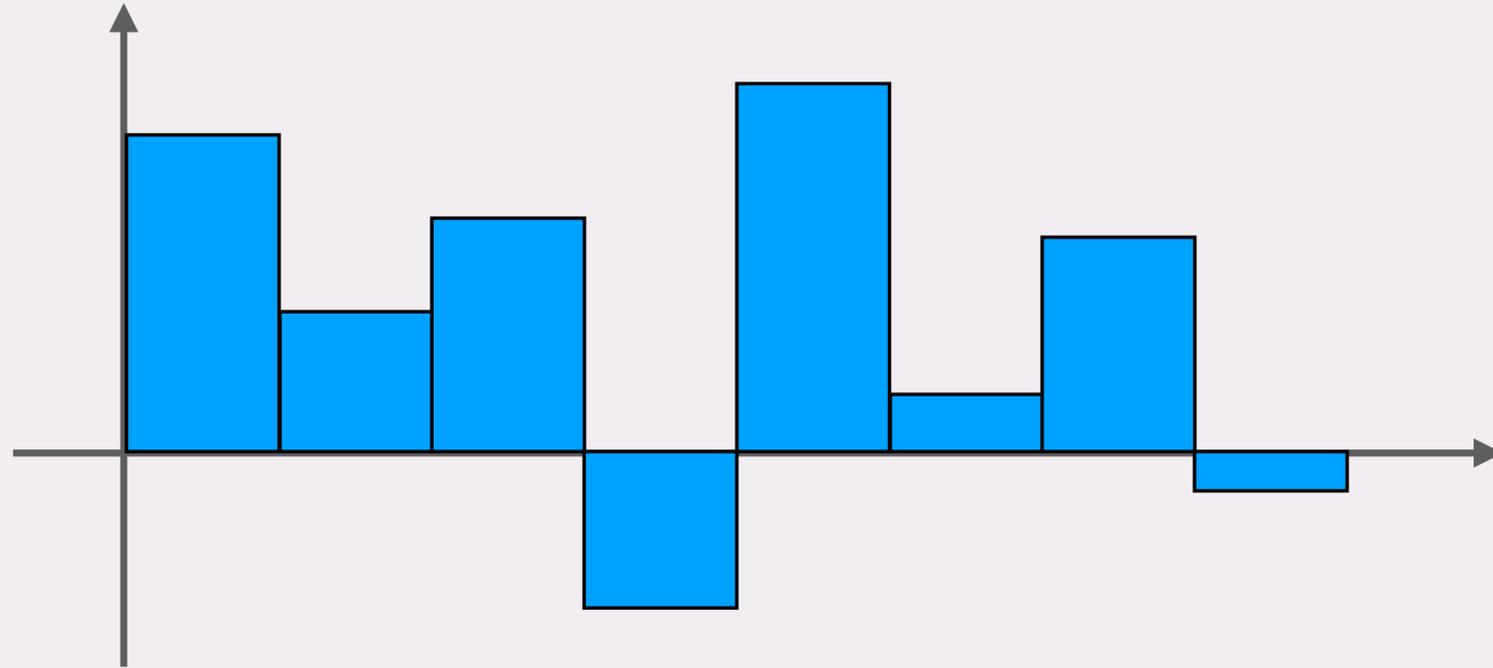
Vettore con 3 componenti

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



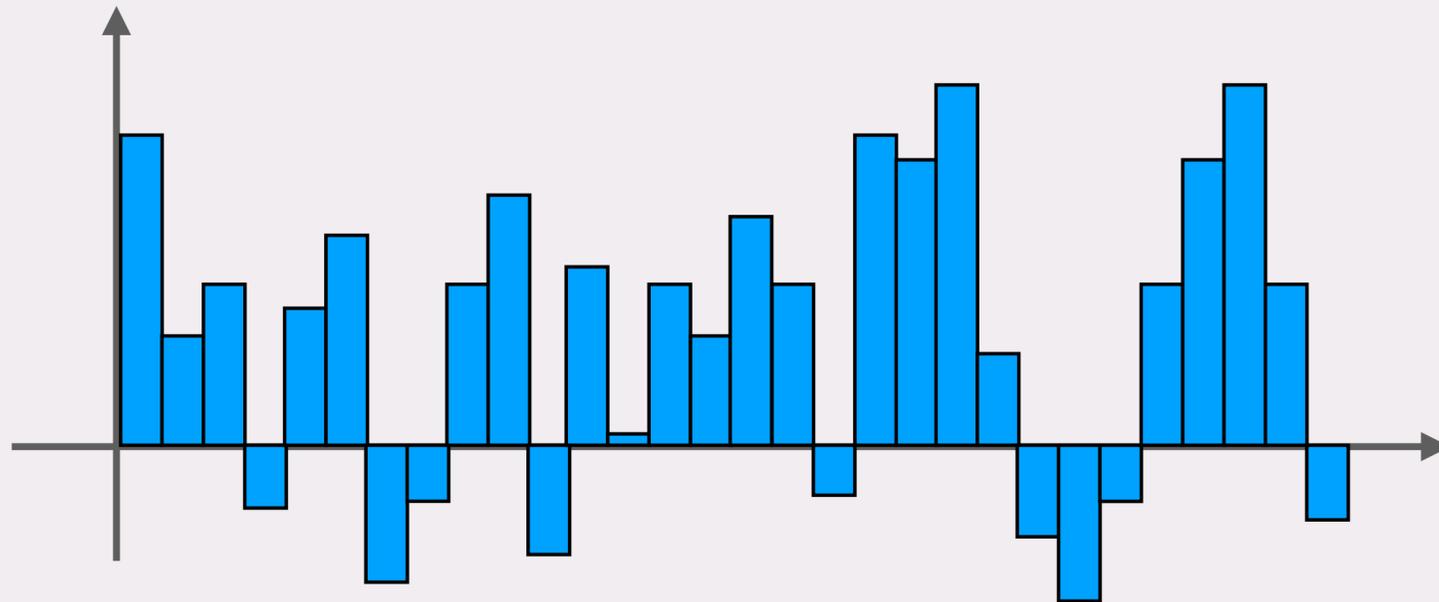
Vettore con 8 componenti

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_8 \end{pmatrix}$$



Vettore con 30 componenti

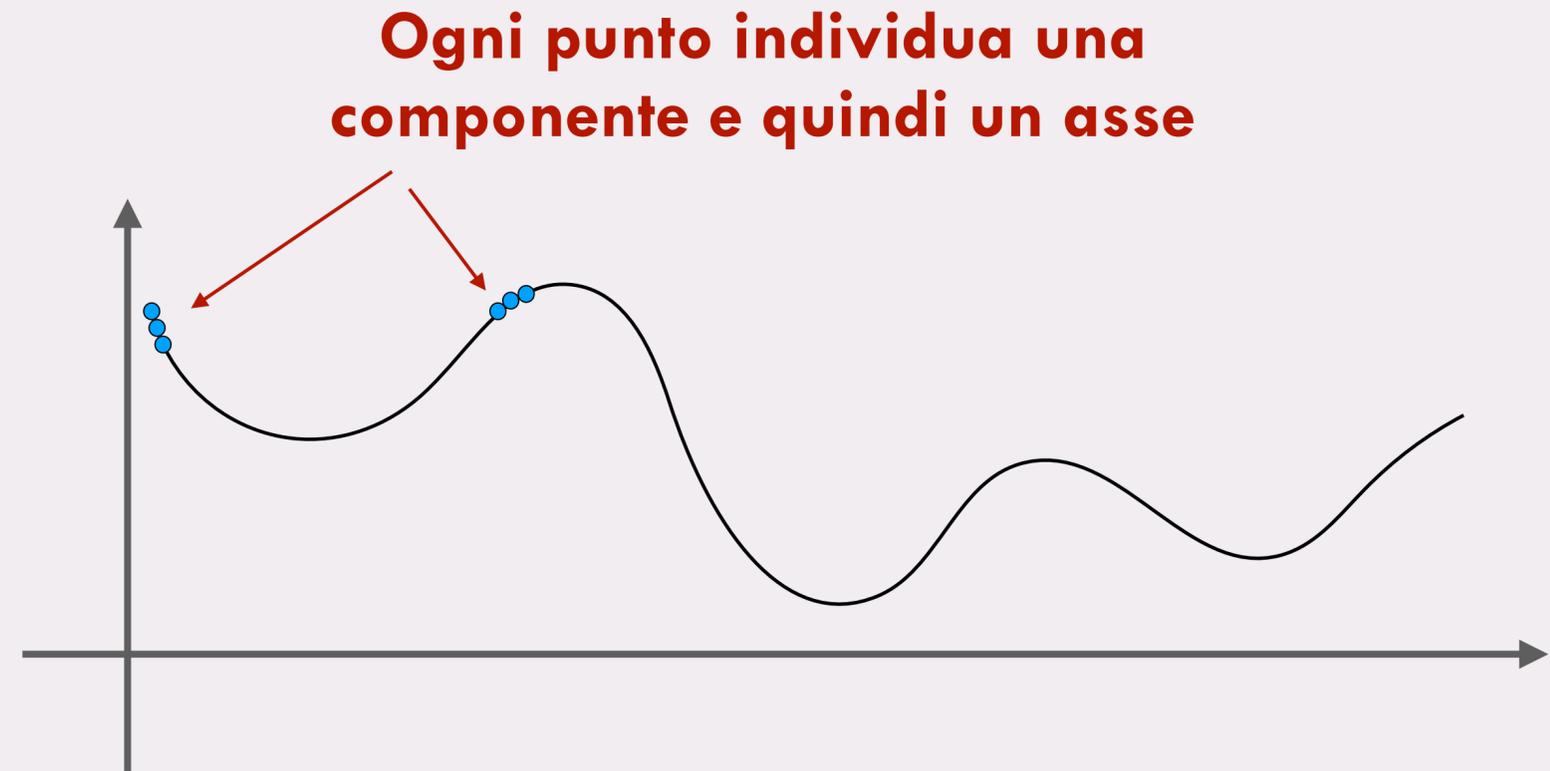
$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{30} \end{pmatrix}$$



Vettore con infinite componenti

Dalle immagini appena viste, vediamo che più componenti si considerano più i rettangoli blu diventano stretti.

Al limite, considerando infinite componenti, otterremo un punto.



Usando questa rappresentazione, possiamo visualizzare i vettori a infinite componenti attraverso delle **funzioni** $a(x)$:

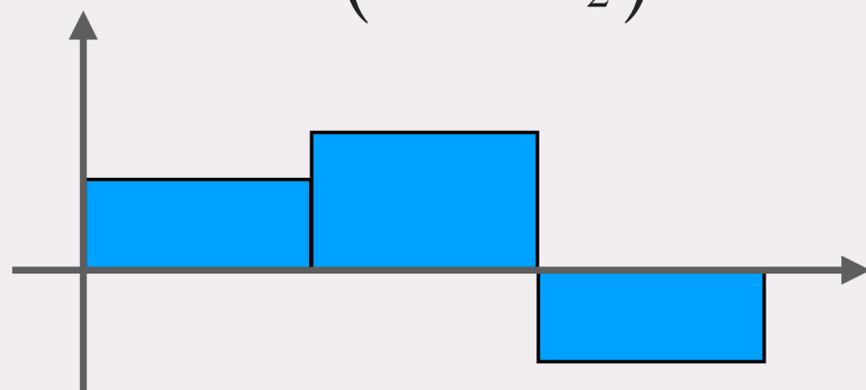
ogni punto rappresenta una componente del vettore e **quindi un asse**.

● STATO: vettore con 3 componenti

Supponiamo di misurare la posizione di un elettrone e di avere solamente tre possibilità. Lo stato $|\Psi\rangle$ in cui si trova prima di effettuare quella misura è un vettore **con 3 componenti di lunghezza unitaria**.

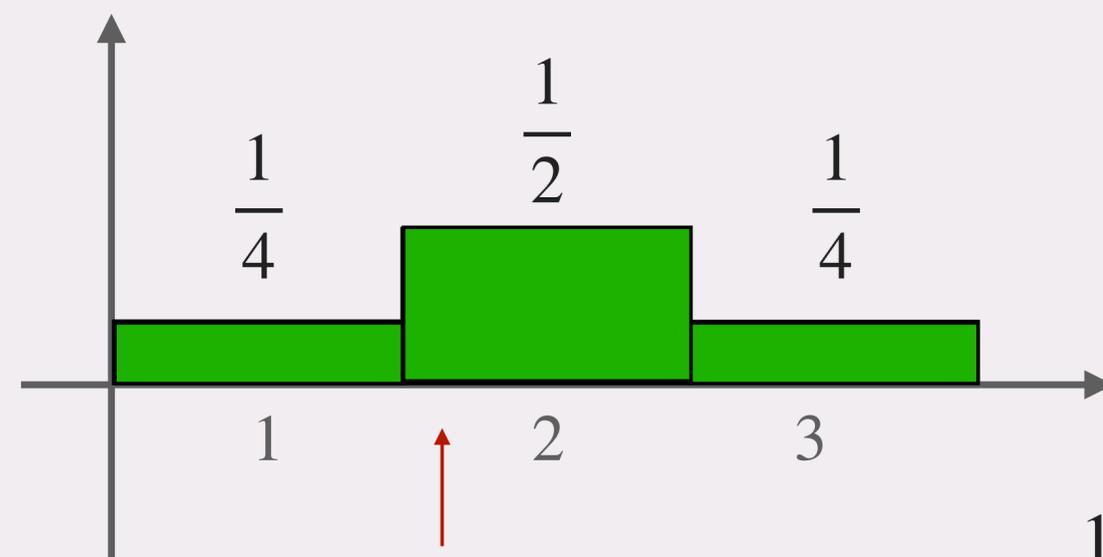


$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 = \frac{1}{2} \\ \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \psi_3 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



Il modulo quadro di queste componenti rappresenta la **probabilità** di ottenere un certo risultato

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 = 1$$



AREA=1

$$\mathcal{P}(1) = \frac{1}{4}$$

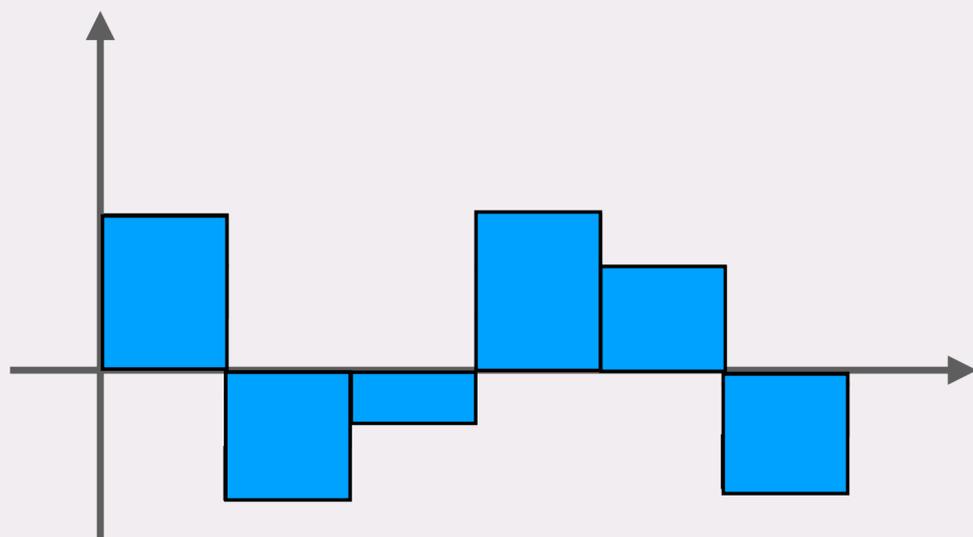
$$\mathcal{P}(2) = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{P}(3) = \frac{1}{4}$$

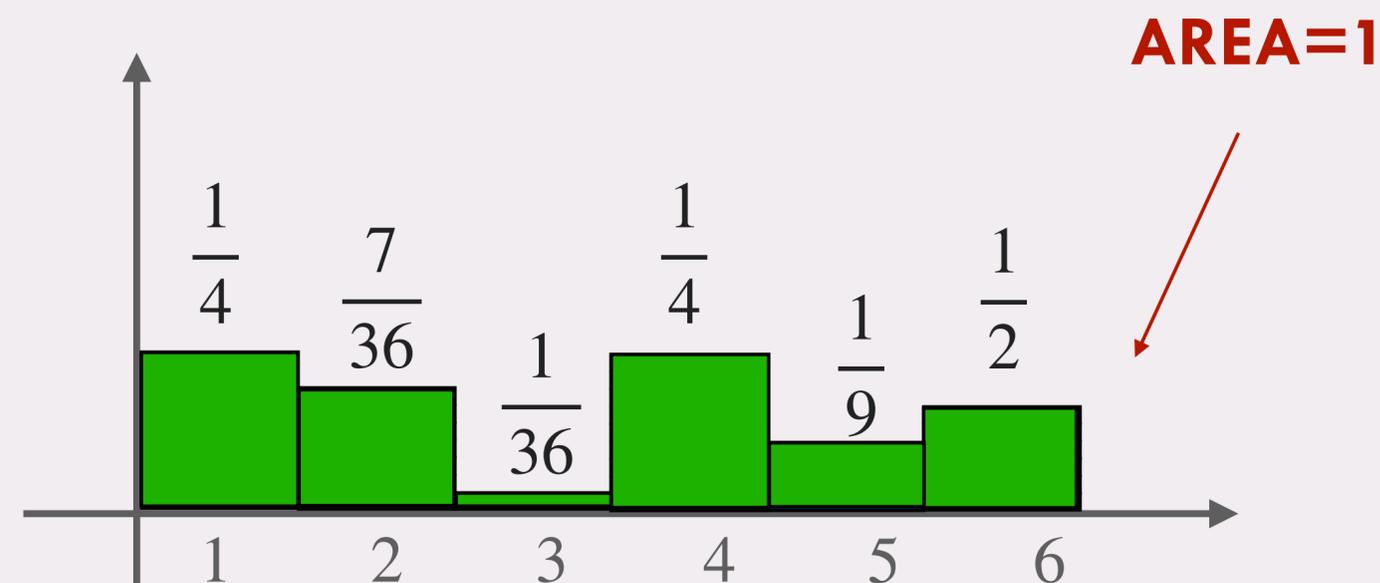
STATO: vettore con 6 componenti

Supponiamo ora di avere sei possibilità. Lo stato $|\Psi\rangle$ in cui si trova prima di effettuare quella misura è un vettore con 6 componenti di lunghezza unitaria.

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{7}}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$



$$\sum_{i=1}^6 |\psi_i|^2 = 1$$



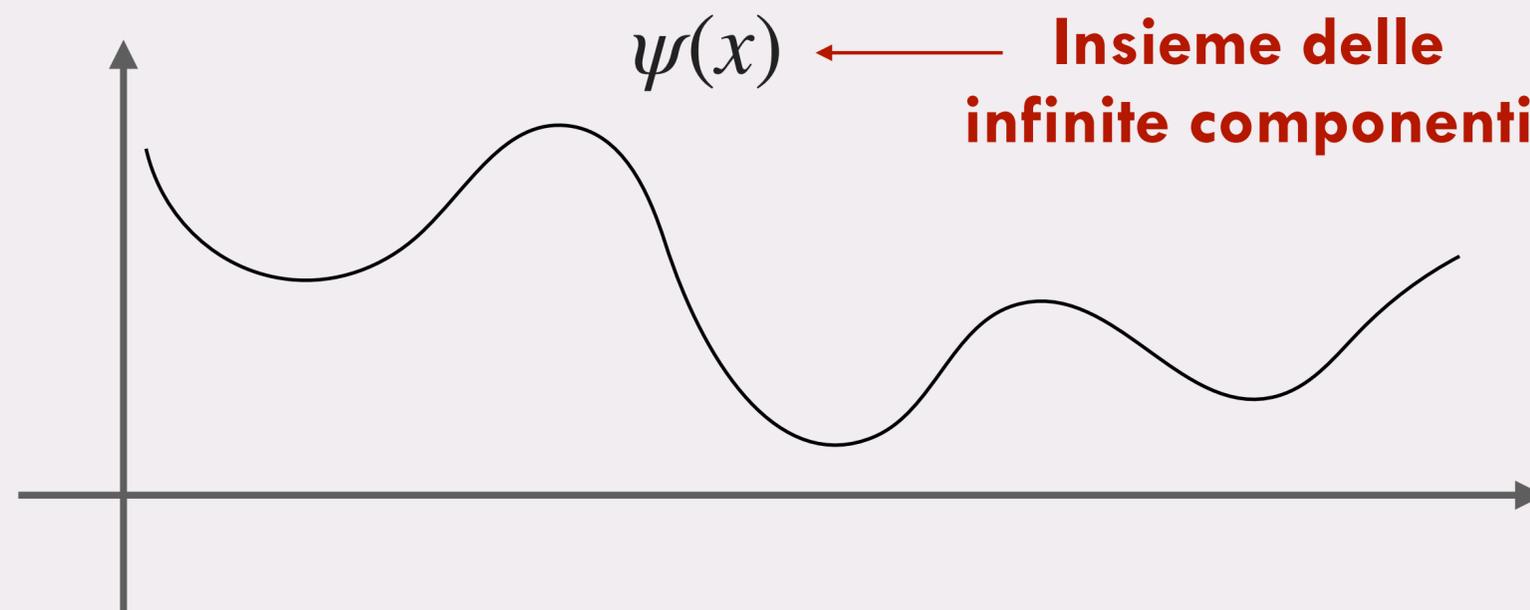
$$\mathcal{P}(2) = \frac{7}{36}$$

$$\mathcal{P}(3 \leq x \leq 5) = \frac{1}{36} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

Somma delle aree!

● STATO: vettore con infinite componenti

Se infine voglio scrivere lo **stato** $|\Psi\rangle$ in cui si trova l'elettrone prima di effettuare la misura della sua posizione, ottengo un **vettore ad infinite componenti di lunghezza unitaria** che posso visualizzare attraverso una funzione $\psi(x)$.

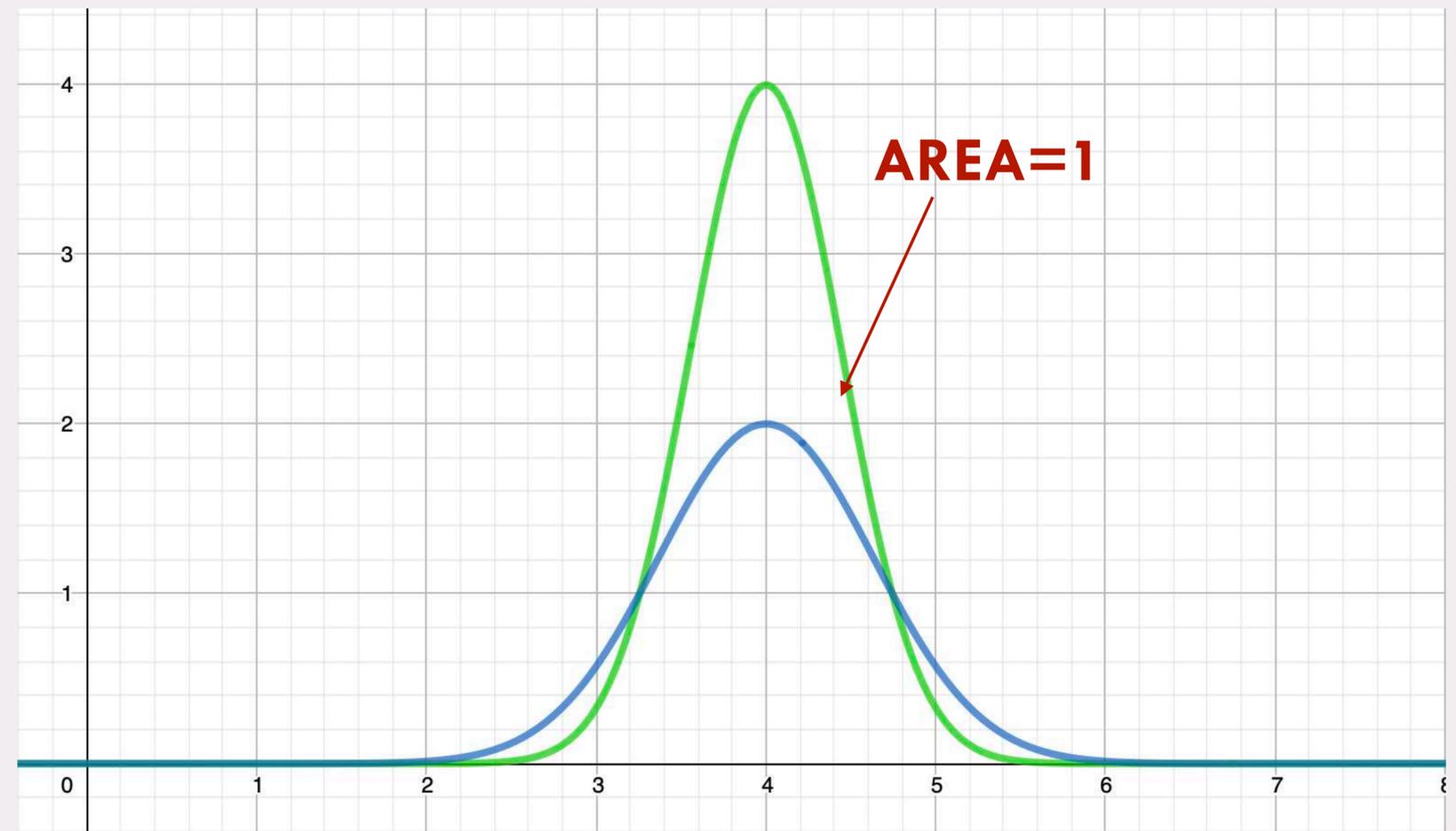
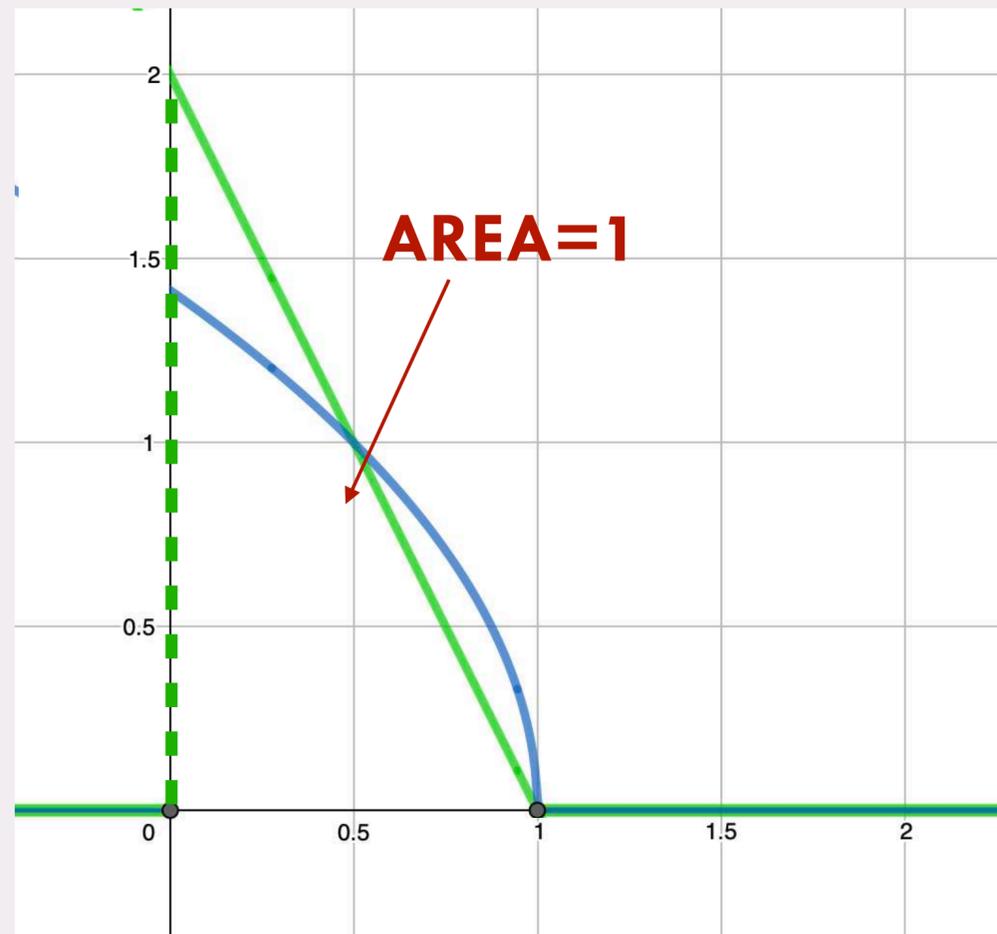
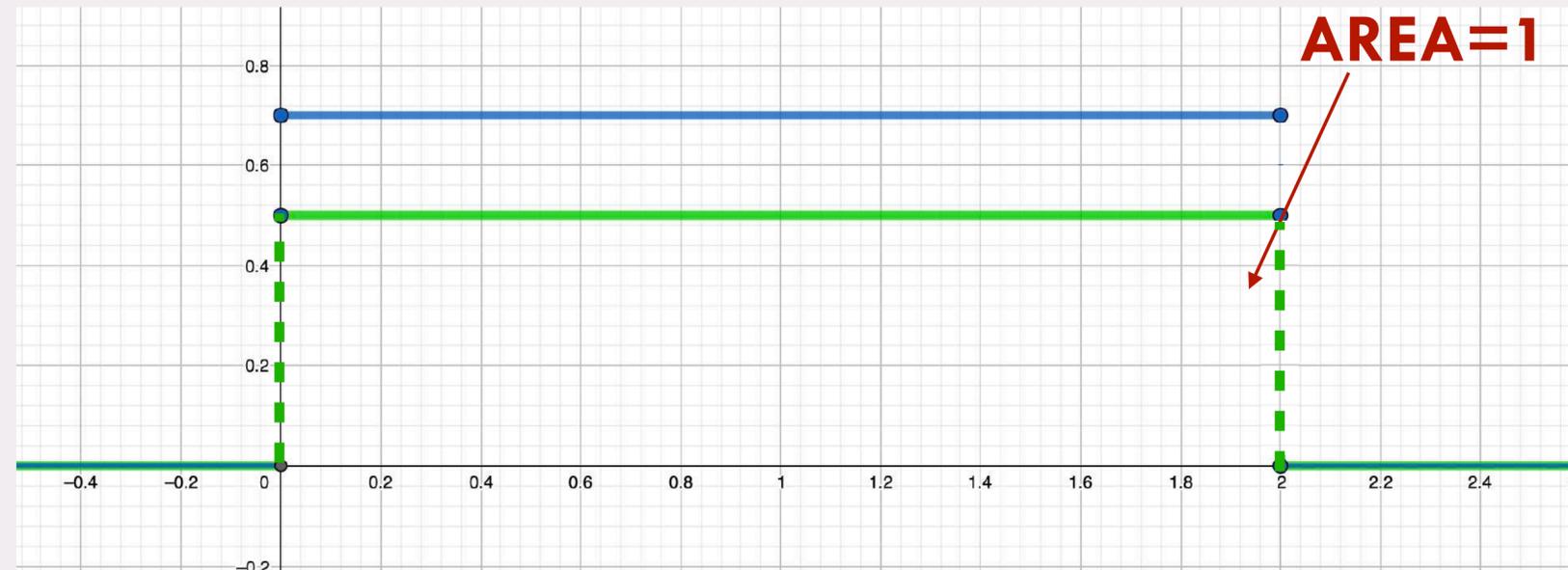


$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

In questo caso la sommatoria diventa un **integrale**.

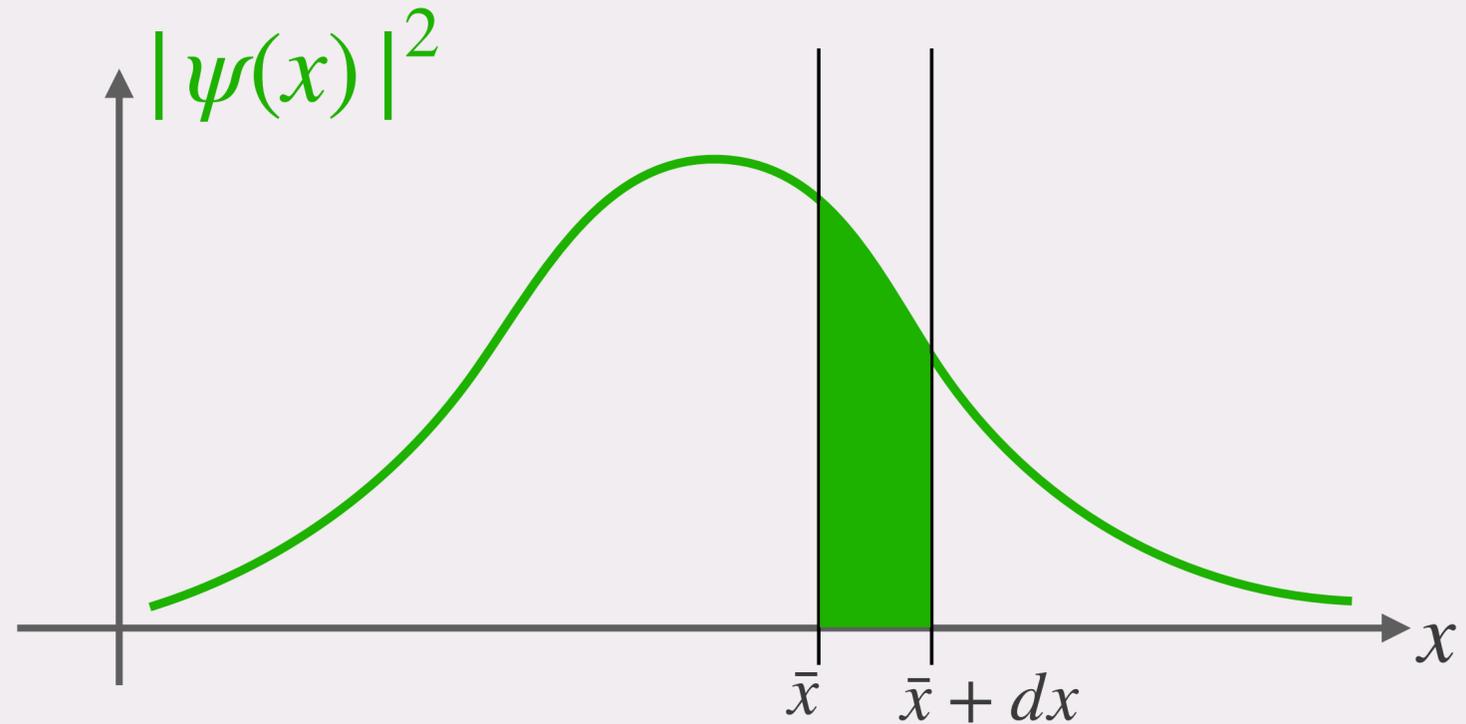
Questa scrittura indica che l'area sottesa alla curva $|\psi(x)|^2$ è pari a 1

$$\psi(x)$$
$$|\psi(x)|^2$$



Qual è il significato di $|\psi(x)|^2$?

$|\psi(x)|^2$ non rappresenta una probabilità ma una **densità di probabilità**.



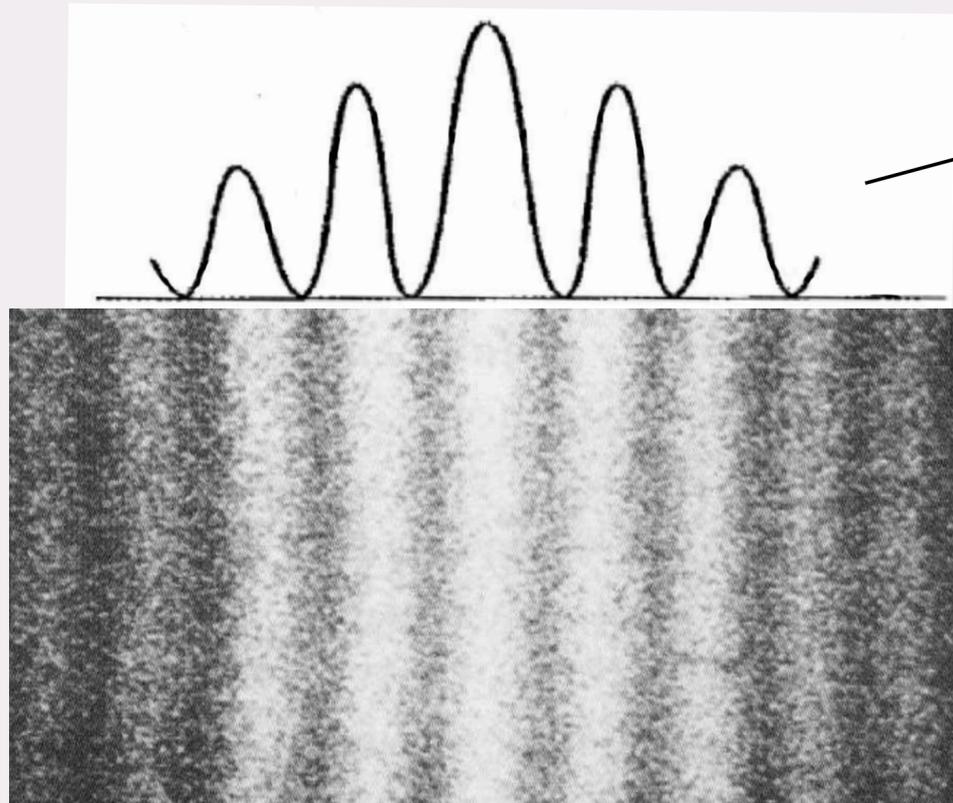
Qual è la probabilità di ottenere un certo risultato?

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+dx} |\psi(x)|^2 dx$$

Probabilità di trovare la
particella nell'intervallo
 $[\bar{x}, \bar{x} + dx]$

Qual è il significato di $|\psi(x)|^2$?

Torniamo a considerare l'esperimento della doppia fenditura. Il risultato che abbiamo ottenuto facendo incidere un singolo elettrone alla volta su un schema con due fenditure è una figura d'interferenza, un'alternarsi di zone chiare e zone scure.



↓
La diversa intensità da noi rivelata è proporzionale al **numero di elettori** che arrivano in quella zona

↓
Il numero di elettroni però è proporzionale anche alla **probabilità** che un elettrone ha di arrivare in quella zona: il grafico che otteniamo rappresenta quindi $|\psi(x)|^2$!

L'OPERATORE POSIZIONE

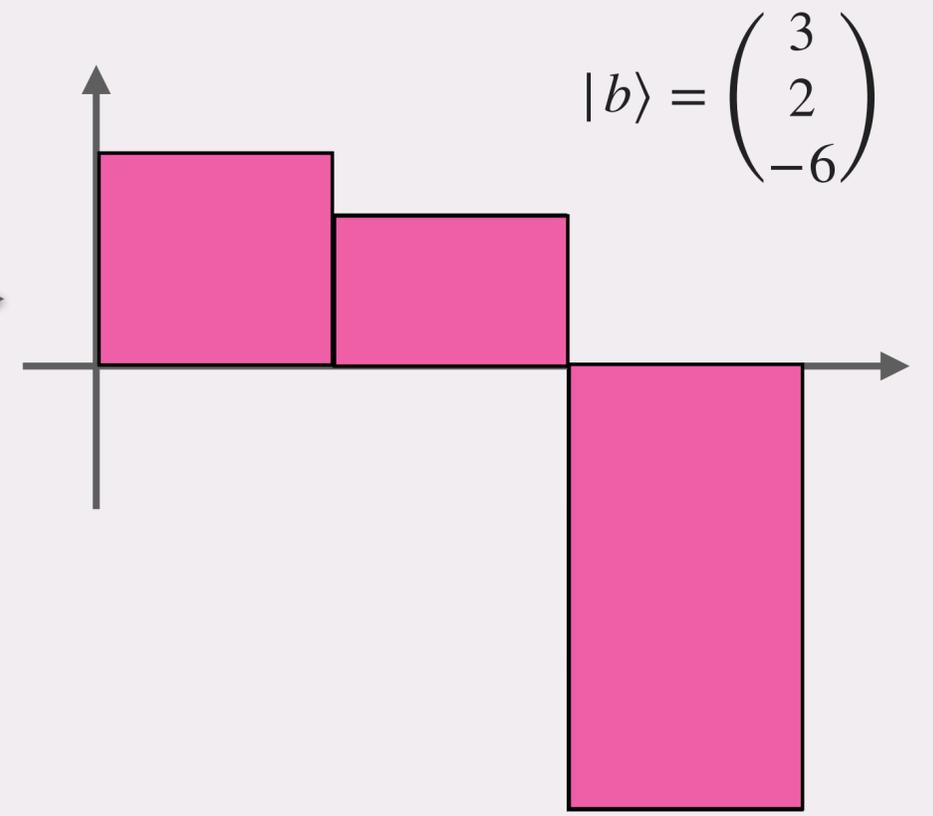
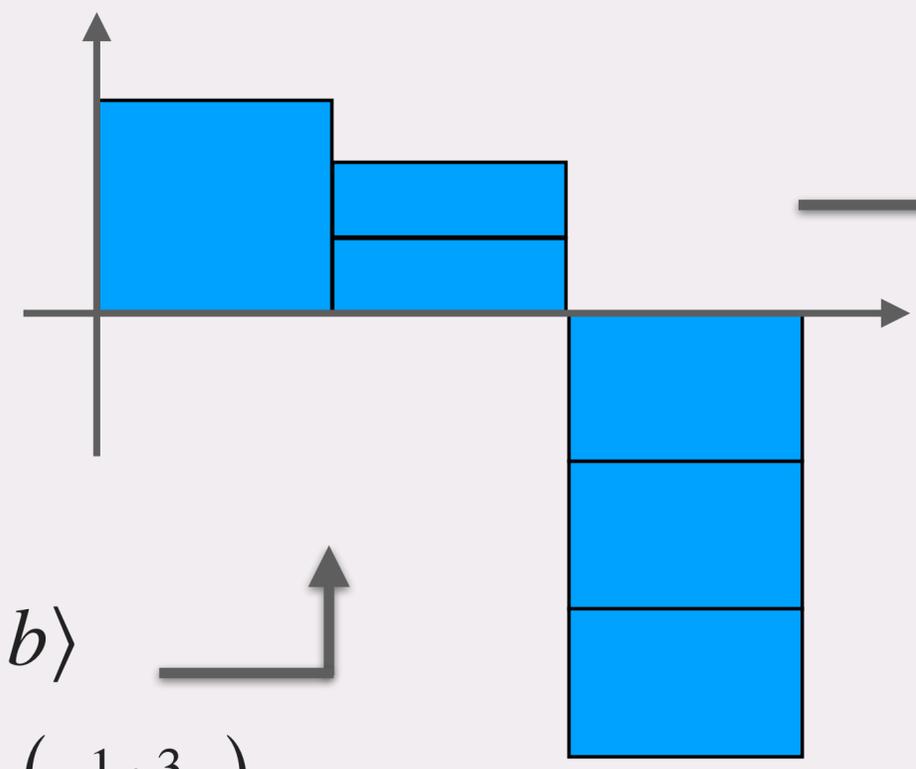
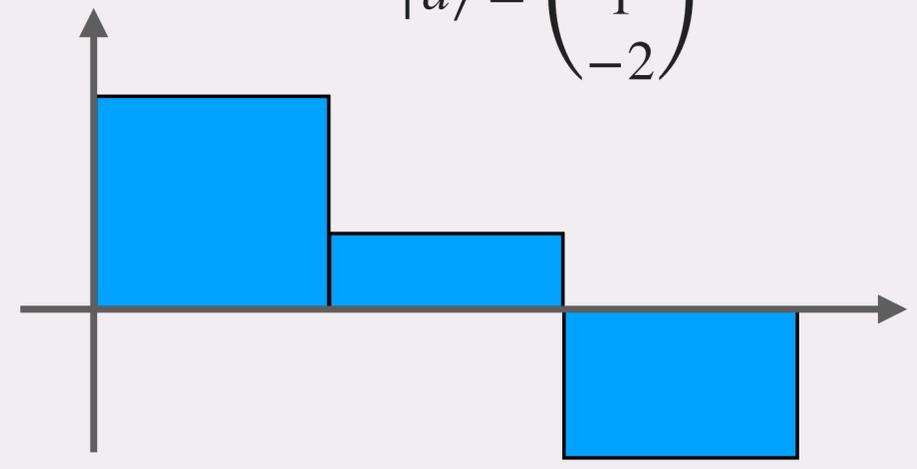


● Dov'è l'elettrone? 3 POSSIBILITÀ



$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$|b\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

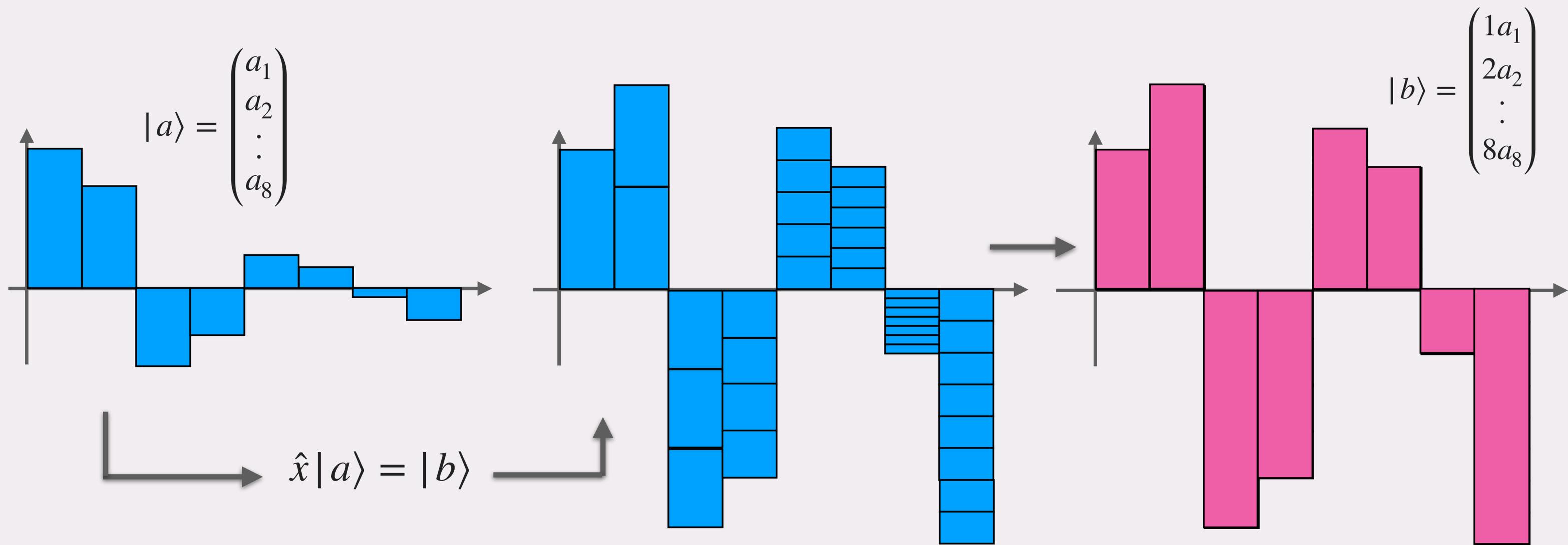
$\hat{x}|a\rangle = |b\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

● Dov'è l'elettrone? 8 POSSIBILITÀ

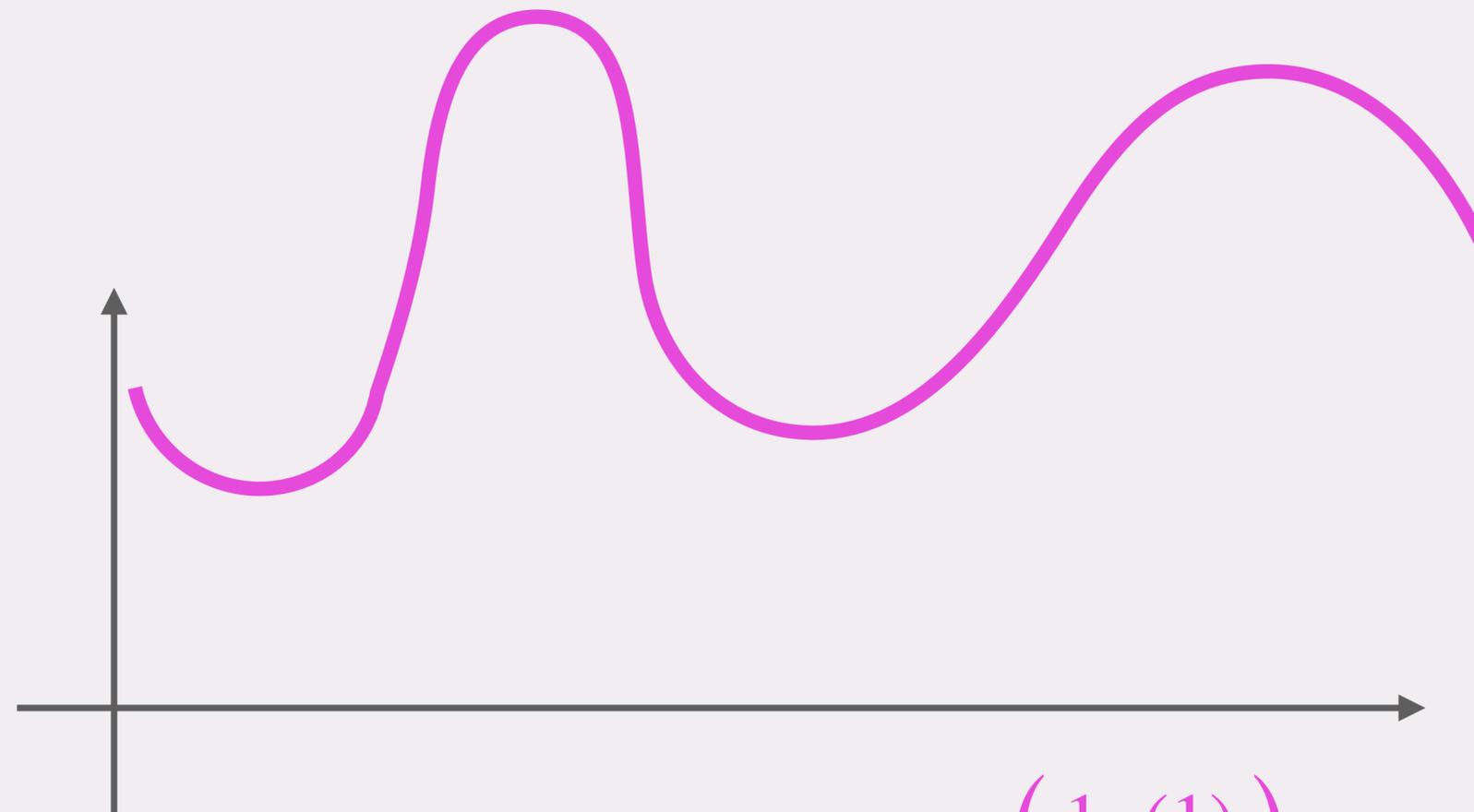
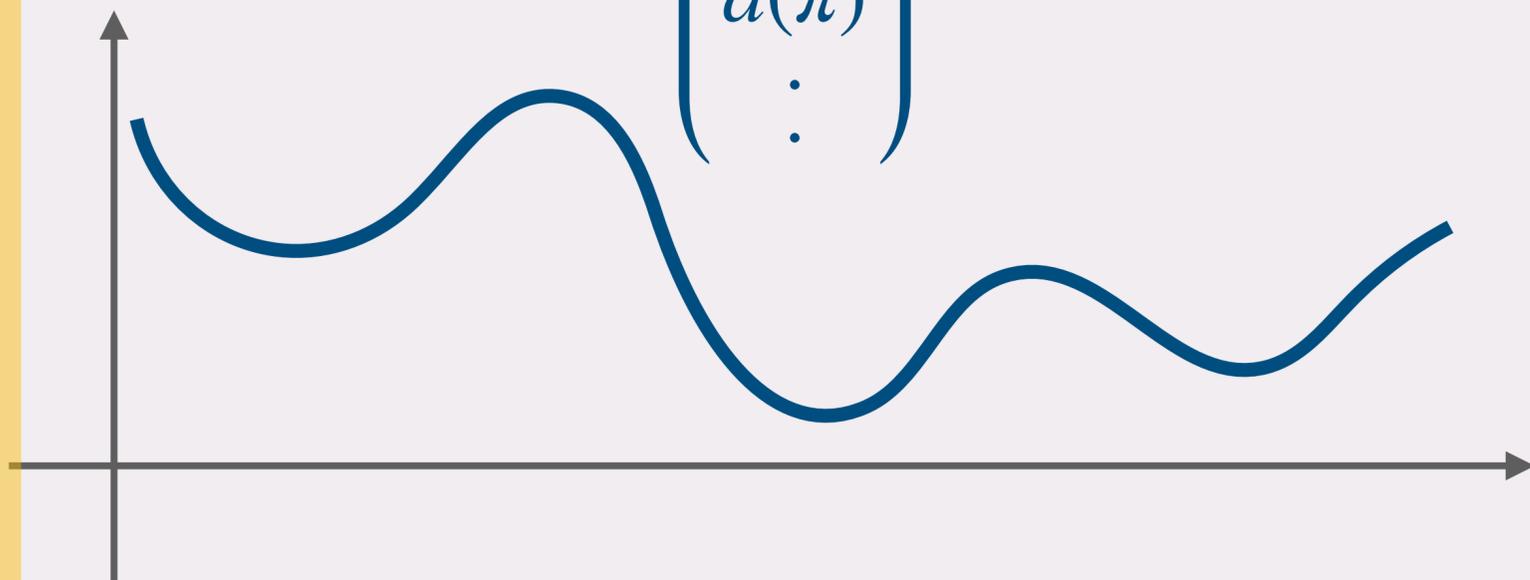


$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$



● Dov'è l'elettrone? INFINITE POSSIBILITÀ

$$a(x) = \begin{pmatrix} a(1) \\ a(\frac{1}{2}) \\ \dots \\ a(\pi) \\ \vdots \end{pmatrix}$$



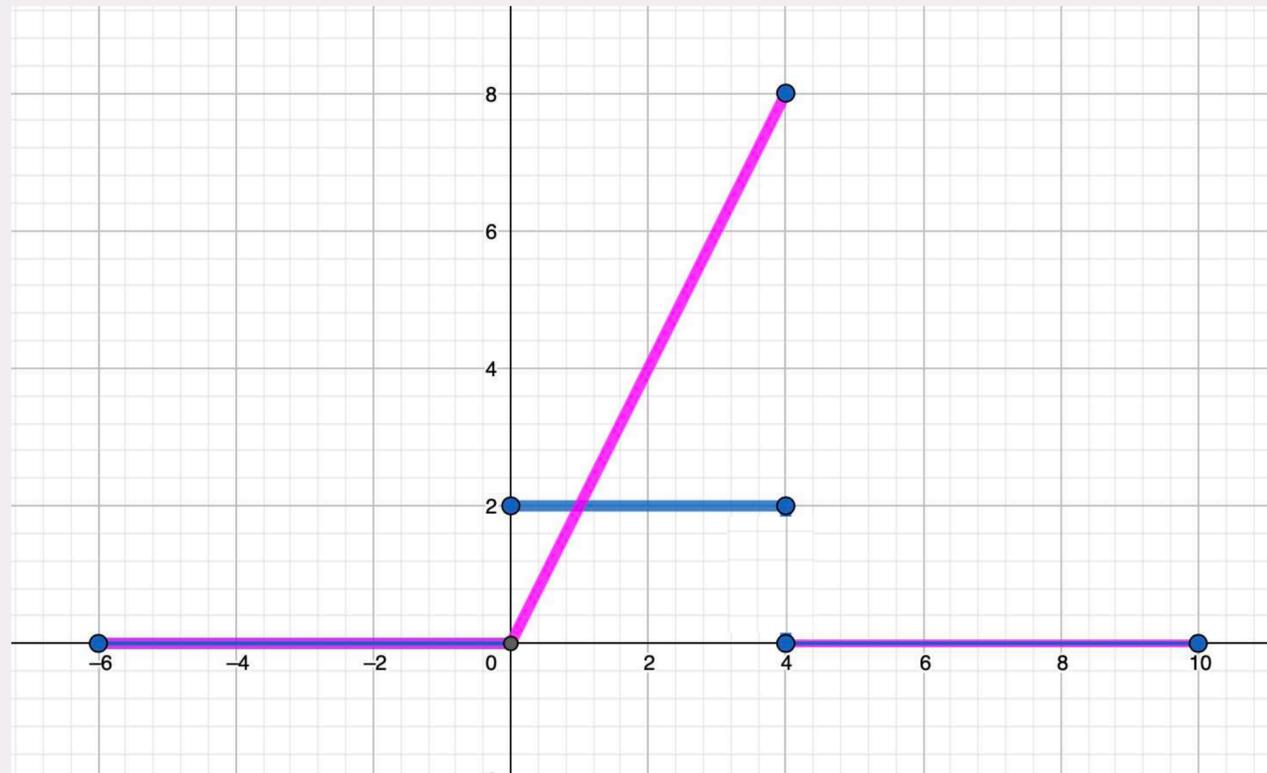
$$\hat{x}[a(x)] = b(x) = x \cdot a(x)$$

$$b(x) = \begin{pmatrix} 1a(1) \\ \frac{1}{2}a(\frac{1}{2}) \\ \dots \\ \pi a(\pi) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = x \cdot$$

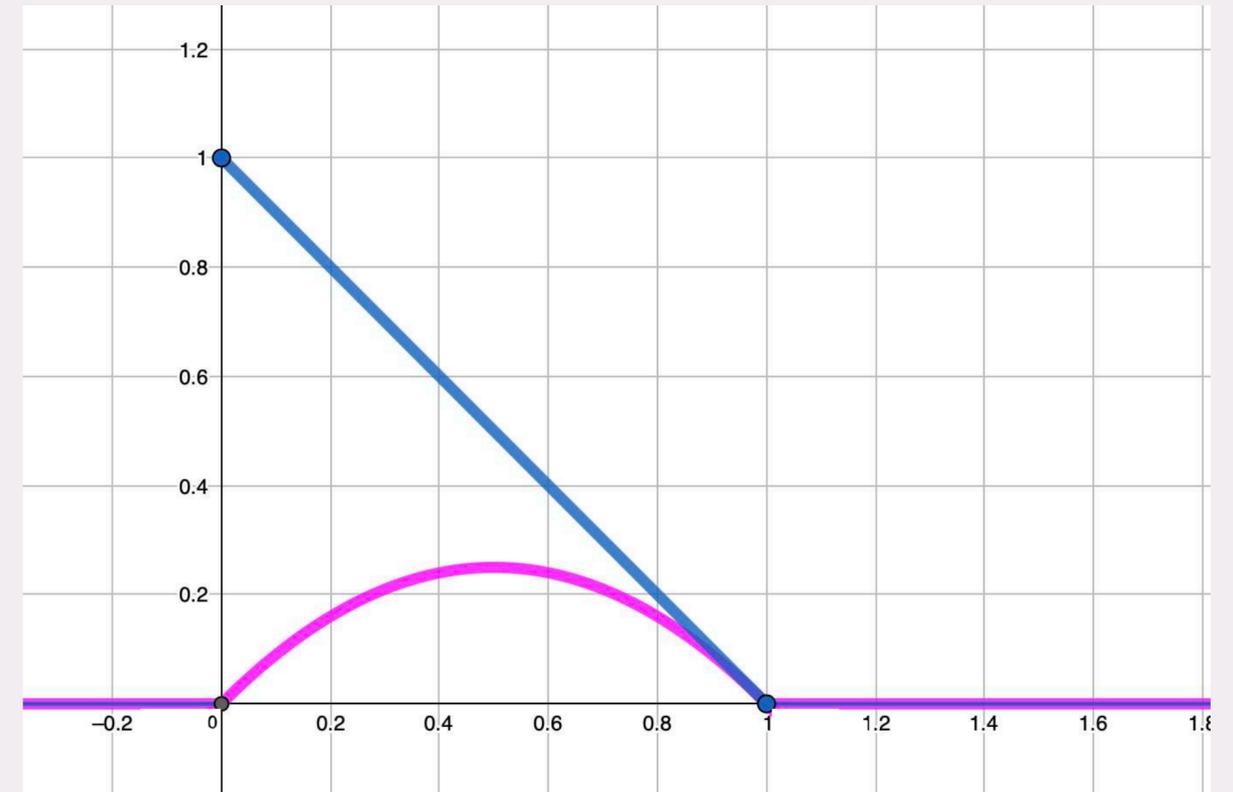
Operatore posizione

$$a(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$b(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$b(x) = x \cdot a(x)$$

$$b(x) = \begin{cases} x - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'OPERATORE QUANTITÀ DI MOTO



Onda complessa:

$$\psi(x) = e^{i(kx - \omega t)}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\bullet p = \frac{h}{\lambda}$$

Relazione di de Broglie

$$\bullet E = \frac{h}{2\pi} \omega = \hbar \omega$$

$$\psi(x) = e^{i\left(\frac{2\pi}{h} px - \frac{E}{\hbar} t\right)} = e^{i\left(\frac{p}{\hbar} x - \frac{E}{\hbar} t\right)}$$

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

Onda complessa di fissata quantità di moto e di fissata energia

OPERATORE QUANTITÀ DI MOTO: \hat{p}

$$\hat{p} \psi(x) = p \psi(x)$$

Autofunzione

autovalore

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{i}{\hbar} p \psi(x)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi(x) = p \psi(x)$$

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x) = p \psi(x)$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

Altri OPERATORI



Altri operatori: \hat{E} , \hat{L}

- Energia

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad \longrightarrow \quad \hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(x)$$

Legame è sugli operatori **NON**
sui risultati

- Momento angolare

$$L = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$$

OPERATORE ENERGIA: \hat{E}

$$\hat{E} \psi(x, t) = E \psi(x, t)$$

↓
Autofunzione

↙
autovalore

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{i}{\hbar} E \psi(x, t) \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = E \psi(x, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = E \psi(x, t) \longrightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

OPERATORE ENERGIA: \hat{E}

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(x)$$

$$\hat{E} \psi(x, t) = E \psi(x, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = E \psi(x, t)$$

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(x) \right) \psi(x, t) = E \psi(x, t)$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right) \psi(x, t) = E \psi(x, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right) \psi(x, t)$$

**EQUAZIONE DI
SCHRODINGER**